TÀI LIỆU ÔN TẬP

SỨC BỀN VẬT LIỆU

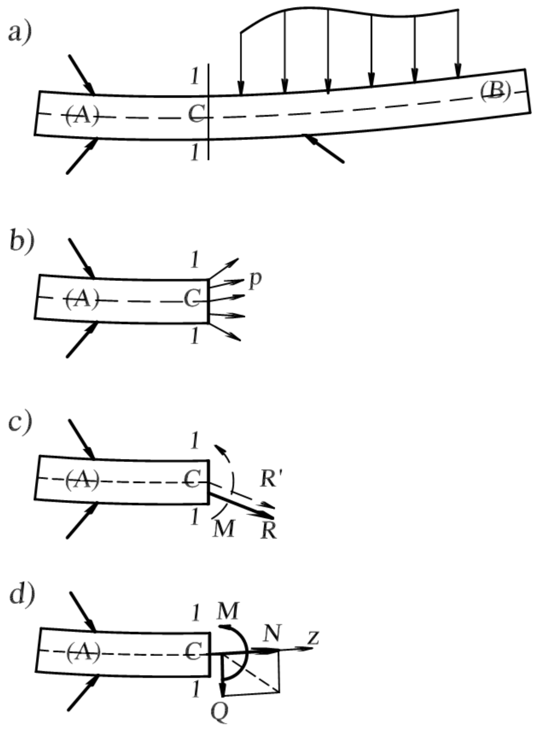
VINH - 2015

CHƯƠNG 2. NỘI LỰC TRONG BÀI TOÁN THANH

2.1. Hợp lực của nội lực trên tiết diện - ứng lực

Như đã trình bày trong chương một, nội lực được thể hiện bằng phương pháp mặt cắt và là một hệ lực phân bố trên mặt cắt đang xét. Ứng suất là cường độ của nội lực, nghĩa là nội lực trên một đơn vị diện tích. Việc tìm luật phân bố trên mặt cắt của các ứng suất là một nhiệm vụ của SBVL. Tuy nhiên, đối tượng nghiên cứu của SBVL là những chi tiết hình thanh, đặc trưng bởi các mặt cắt ngang và trục nên mặt cắt thường xét là những mặt cắt vuông góc với trục, hoặc gọ là tiết diện.

Để đơn giản trình bày nhưng không làm mất đi tính tổng quát của cách đặt vấn đề, ta xét bài toán thanh phẳng cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực, hình 2.1a



Hình 2.1. Ứng lực là hợp lực của nội lực

Tưởng tượng cắt thanh thành hai thành phần A và B bởi mặt cắt 1-1. Phần A phải cân bằng dưới tác động của ngoại lực thuộc phần A và ứng suất p phân bố trên mặt cắt 1-1, hình 2-1b.

Ta có thể thay hệ lực phân bố trên tiết diện bằng một lực tập trung $\vec{R}$ đặt tại một điểm xác định trên tiết diện 1-1 sao cho A vẫn cân bằng, hình 2-1c. R gọi là hợp lực của nội lực trên tiết diện – ***ứng lực***

Theo quy tắc dời lực, đưa $\vec{R}$ đưa về trọng tâm C của tiến diện ta được một mô men tập trung $\vec{M}$ và lực tập trung $\vec{R}'$, phân $\vec{R}'$ thành 2 thành phần:

- $\vec{N}$: vuông góc với mặt cắt theo phương pháp tuyến
- $\vec{Q}$: lực cắt nằm trong mặt phẳng tiết diện, vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh.

2.2. Biểu đồ ứng lực – phương pháp mặt cắt biến thiên

Để tìm ứng suất tại một tiết diện nào đó trong thanh ta dùng phương pháp mặt cắt. Khi cho mặt cắt biến thiên dọc theo trục thanh ta sẽ được các hàm của ứng lực: $N_{(Z)}$, $Q_{(Z)}$, $M_{(Z)}$ phụ thuộc vào hoành độ z theo trục thanh. Từ đó ta vẽ được các đồ thị của các hàm số này *(chính là biểu đồ ứng lực)*

Thông quá các ví dụ sau chúng ta sẽ hiểu rõ về biểu đồ ứng lực :

Ví dụ 2.3.

Vẽ biểu đồ ứng lực của dầm công xôn chiều dài *l* chịu lực tập trung F tại mút tự do.

Bài giải:

Dùng phương pháp mặt cắt biến thiên.

Cắt thanh bởi mặt cắt 1-1 xét phần trái, đặt vào mặt cắt các ứng lực: M, N, Q. Áp dụng công thức (2-2) xác định nội lực:

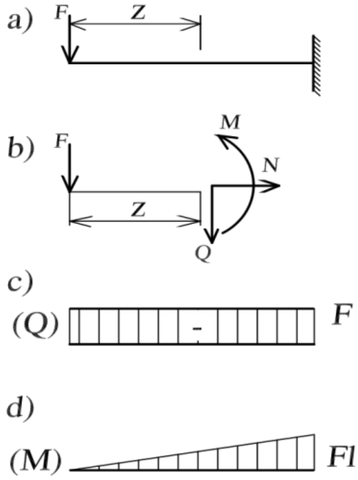
$N = 0$

$Q = - F$ là hằng số

$M = - F.z$ ($0 \leq z \leq l$) là hàm bậc nhất biến thiên:

Tại $z = 0 \rightarrow M = 0$;

Tại $z = l \rightarrow M = -F.l$



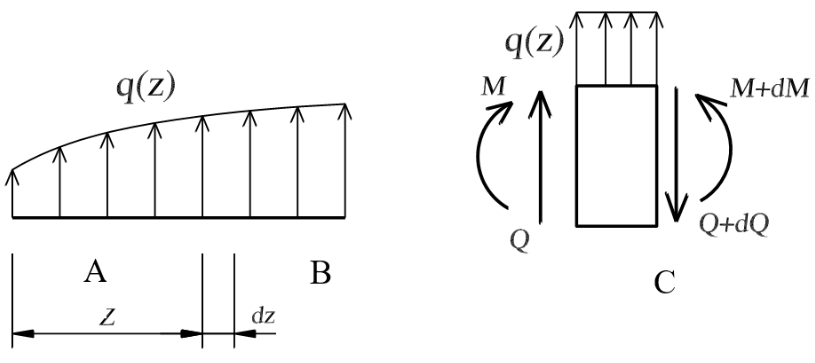
Hình 2.6. Cho ví dụ 2.3

Quy tắc vẽ biểu đồ nội lực trong Sức bền vật liệu.

- Tên biểu đồ được đặt trong ngoặc đơn *(M), (N), (Q)*
- Biểu đồ lực dọc, lực cắt nhất thiết phải ghi rõ dấu (+), (-).
- Biểu đồ mô men uốn không cần ghi dấu nhưng đặt các tung độ của biểu đồ về phía thớ thanh bị căng.
- Sau khi vẽ dạng biểu đồ ta kẻ các đường tung độ vuông góc với trục thanh.
- Độ lớn của tung độ bằng giá trị ứng lực tại tiết diện tương ứng.

2.3. Quan hệ giữa mô men uốn, lực cắt và tải trọng ngang trong thanh thẳng

2.3.1. Quan hệ vi phân giữa (M), (Q) và tải trọng phân bố q.



Hình 2.9. Quan hệ vi phân giữa ứng dụng và tải trọng phân bố

Xét thanh thẳng chịu tải trọng phân bố với cường độ *q(z)*, hình 2-9. Điều kiện cân bằng của một đoạn chiều dài phân tố *dz* tại hoành độ *z*, mặt bên trái có tọa độ *z*, mặt bên phải là *(z + dz)* là:

Phân tố cân bằng:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q + qdz - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dz} = q$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M + Qdz + \frac{qdz^2}{2} - (M + dM) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dz} = Q$$

Suy ra: $$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q \quad (2\text{-}3)$$

Từ quan hệ (2-3) ta nhận xét:

- Biểu đồ ứng lực là đường thẳng hoặc đường cong tuỳ theo tải trọng phân bố q
- Mô men uốn đạt cực trị tại tiết diện có lực cắt bằng không.
- Có thể tính được giá trị của ứng lực tại một tiết diện khi biết giá trị ứng lực tại một tiết diện khác:

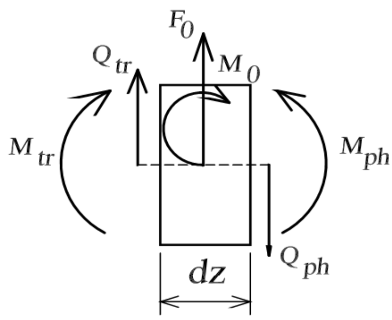
$$\mathrm{dQ = qdz} \Rightarrow \int_A^B dQ = \int_A^B qdz = Q_A - Q_B = S_q \quad (2\text{-}4)$$

$$\mathrm{dM = Qdz} \Rightarrow \int_A^B dM = \int_A^B Qdz = M_A - M_B = S_Q \quad (2\text{-}5)$$

S_Q, S_q tương ứng là diện tích biểu đồ lực cắt và tải trọng phân bố trong đoạn AB

2.3.2. Quan hệ bước nhảy của biểu đồ mô men uốn, lực cắt và các tải trọng tập trung.

Cho một thanh thẳng (hình 2.10) chịu lực ngang tập trung F_o và mô men tập trung M_o. Xét cân bằng của đoạn thanh dz có các ngoại lực tập trung: ứng lực tiết diện bên trái: M_{tr}, Q_{tr}, ứng lực tiết diện bên phải M_{ph}, Q_{ph}



Hình 2.10

Phương trình cân bằng cho ta:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr} = F_0 \quad (2.6)$$

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow \Delta M = M_{ph} - M_{tr} = M_0 \quad (2.7)$$

$\Delta M = M_{ph} - M_{tr}$ bước nhảy của mô men uốn

$\Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr}$ bước nhảy của lực cắt

Nhận xét:

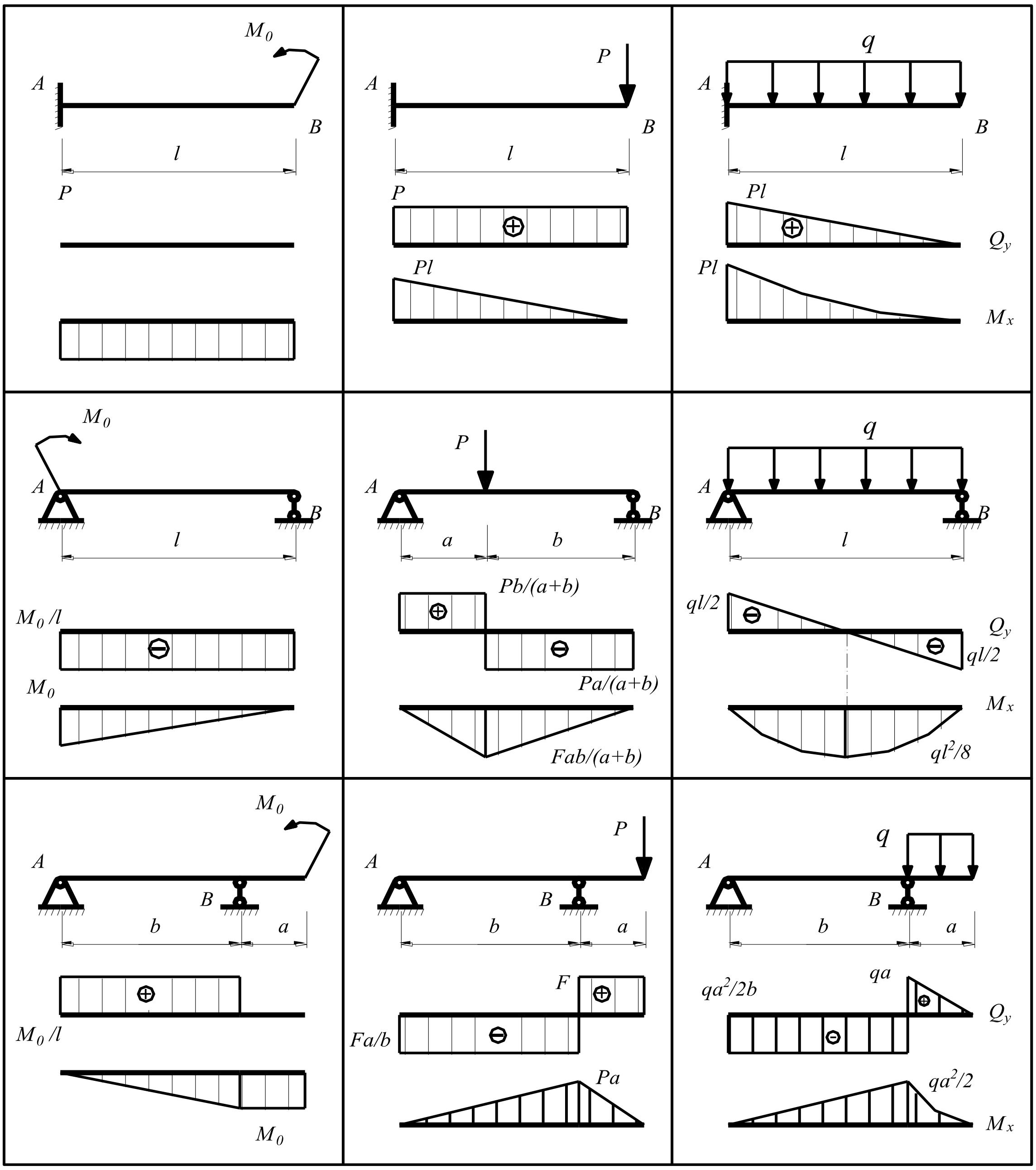
- Tại tiết diện đặt lực tập trung *(F_o, M_o)* biểu đồ *(M), (Q)* sẽ có bước nhảy
- Bước nhảy của lực cắt là dương *($\Delta Q > 0$)* nếu ngoại lực hướng lên, của mô men uốn là dương nếu mô men tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ. Chiều trục z từ trái qua phải.

2.4. Cách vẽ biểu đồ theo nhận xét

2.4.1. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Khi thanh chịu tác dụng của nhiều tải trọng, ta có thể vẽ biểu đồ ứng lực trong thanh do từng tải trọng gây ra lần lượt, rồi cộng đại số các biểu đồ ứng lực đó để được kết quả cuối cùng. Cách vẽ này gặp thuận lợi khi sử dụng được các biểu đồ mẫu.

Bảng 2-1. Biểu đồ mẫu

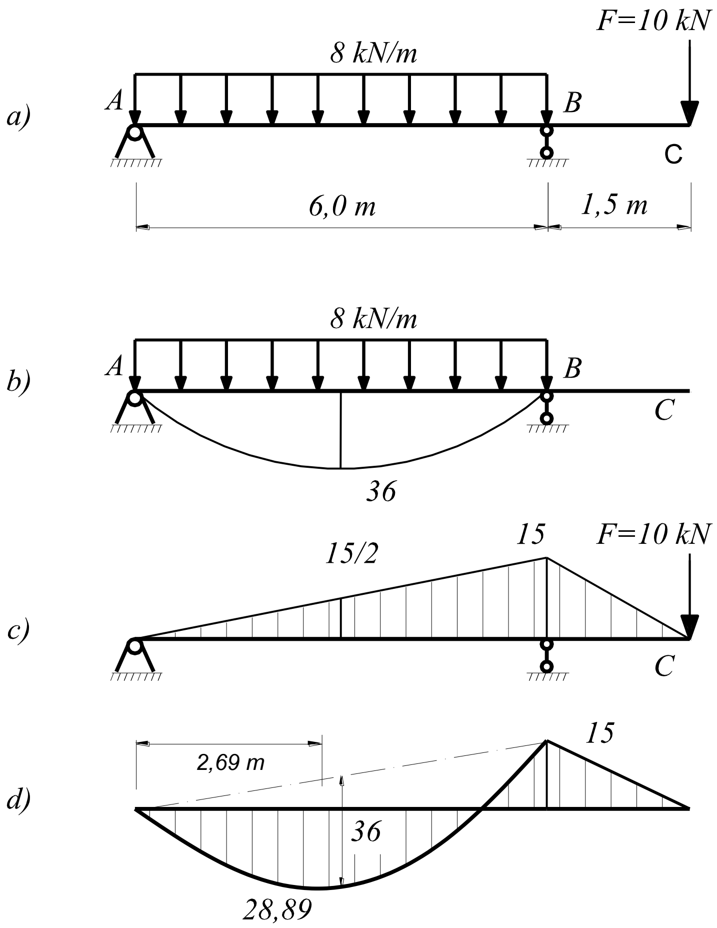


Ví dụ 2.6. Vẽ biểu đồ mô men của dầm trên (hình 2.11a) bằng phương cộng biểu đồ.

Bài giải:

Tải trọng trên thanh được chia thành ba trường hợp cơ bản đã cho. Vẽ biểu đồ cho từng trường hợp:

- Trên hình 2.11b là biểu đồ mô men uốn do tải trọng phân bố q = 8 kN/m gây ra,
- Trên hình 2.11c là biểu đồ mô men uốn do tải trọng tập trung F gây ra,
- Trên hình 2.11d là biểu đồ mô men uốn tổng cộng cần tìm, các tung độ bằng tổng đại số của các tung độ tại tiết diện tương ứng trên hình 2-11b,c.



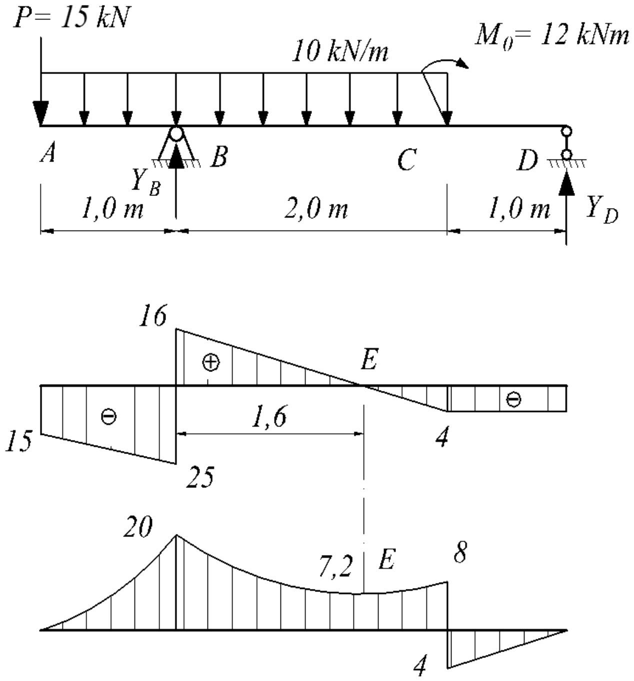
Hình 2.11. Cho ví dụ 2.6

2.4.2. Cách vẽ theo từng điểm

Dựa trên các quan hệ vi phân và quan hệ bước nhảy sẽ giúp cho việc vẽ biểu đồ một cách nhanh và đơn giản hơn cách dùng mặt cắt biến thiên. Nếu biểu đồ là đường cong thì cần ba giá trị: điểm đầu, điểm cuối và tại nơi có cực trị, nếu không có cực trị thì cần biết chiều lồi, lõm của biểu đồ theo dấu của đạo hàm cấp hai.

Ví dụ 2.7.

Vẽ biểu đồ mô men uốn trong dầm cho trên hình 2.12a bằng cách vẽ theo từng điểm.



Bài giải

Xác định các phản lực: $\sum M_D = 0 \rightarrow Y_B = 41kN$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow Y_D = 4kN$$

Dầm được phân thành ba đoạn AB, BC, CD.

Biểu đồ lực cắt Q:

- Trong đoạn dầm AB: Tại A có lực tập trung bằng 15 kN nên biểu đồ lực cắt có bước nhảy bằng 15kN, lực đi xuống nên bước nhảy cũng đi xuống
- Tại B có $Q_B = Q_A + S_{qAB} = -15+(-10.1) = -25$ kN

Trong đoạn BC:

- Tại B có lực tập trung nên bước nhảy bằng phản lực tại B với $Y_B = 41$kN hướng lên. Do đó lực cắt trong đoạn này bằng: $Q_{ph} = Q_{tr} + \Delta Q = -25 + 41 = 16$ kN;
- Tại C có QC= QB + SqBC = 16 +(-10.2) = -4 kN

Trong đoạn CD không có lực phân bố nên lực cắt là hằng số $Q_D = -4$ kN

- Tìm đoạn có Q=0, giả sử đó là điểm E
- $Q_E = Q_B + S_{qBE} = -16+(-10.BE) = 0 \rightarrow BE = 1,6$m

Biểu đồ mô men uốn M:

- Trong đoạn AB là đường bậc hai do có tải trọng phân bố: tại A không có mô men ngoại lực tập trung nên biểu đồ mô men uốn không có bước nhảy do đó $M_A = 0$,

$$M_B = M_A + S_{QAB} = 0 + 1. - (15+25)/2 = 20 \text{ kNm}$$

- Đặt các tung độ M_A , M_B ta vẽ được các biểu đồ mô men uốn trong đoạn AB
- Trong đoạn BC biểu đồ mô men cũng là đường bậc hai:

Tại E ta có mô men cực trị: $M_E = M_B + S_{QBE} = -20 + 16.1,6/2 = 7,2$ kNm.

- Trong đoạn CD biểu đồ mô men có bước nhảy và đường bậc nhất:
- $M_{Ctr} = M_E + S_{QEC} = -7,2 +(-0,4.4/2) = -8$ kNm

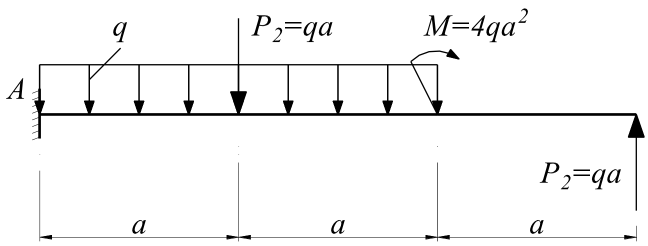
Tại C có mô men ngoại lực tập trung quay cùng chiều kim đồng hồ $M_0 = +12$;

- $M_{Cph} = M_{Ctr} + M_0 = -8+12 = 4$ kNm

Tại tiết diện D có $M_D = M_C + S_{QCD} = 4+ (-4.1) = 0$

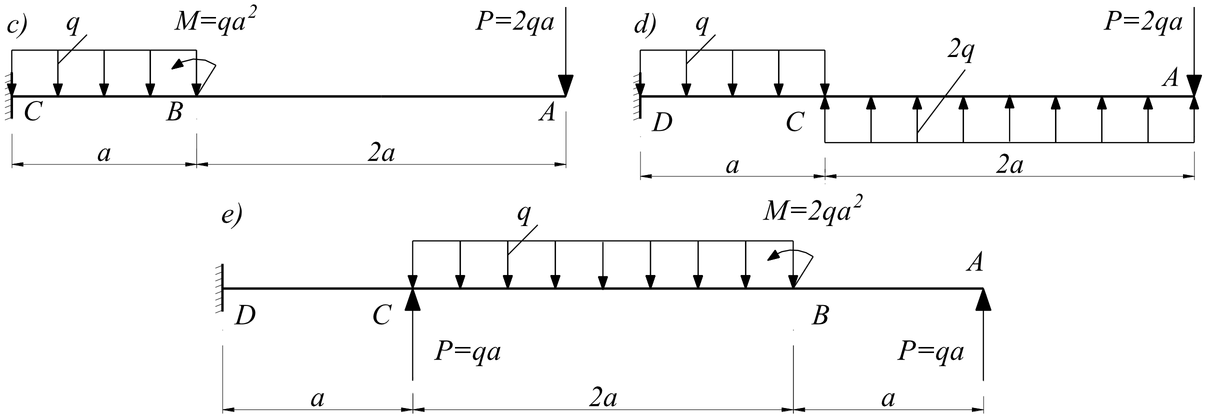
BÀI TẬP CHƯƠNG

Bài 2.1. Vẽ nội lực cho dầm trên hình vẽ 2.1



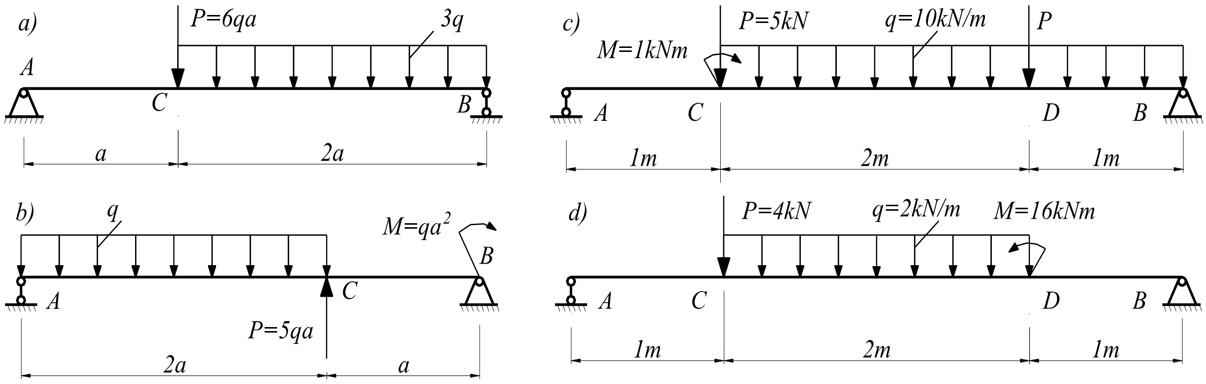
Hình 2.1

Bài 2.2. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 2.2.



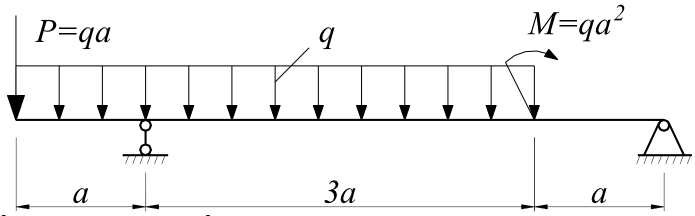
Hình 2.2

Bài 2.3. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 2.3.

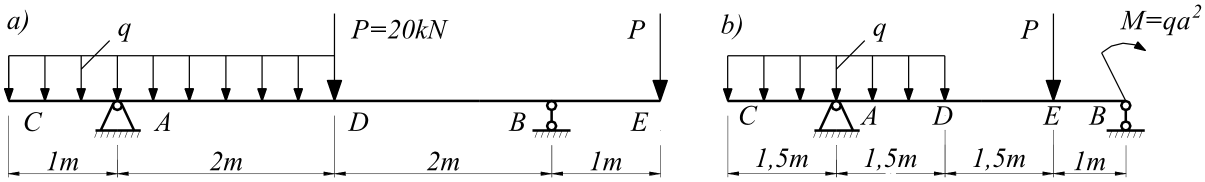


Hình 2.3

Bài 2.4. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 2.4



Bài 2.5. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 2.5



Hình 2.5

CHƯƠNG 3. THANH CHỊU KÉO HOẶC NÉN ĐÚNG TÂM

3.1. Ứng suất trên tiết diện

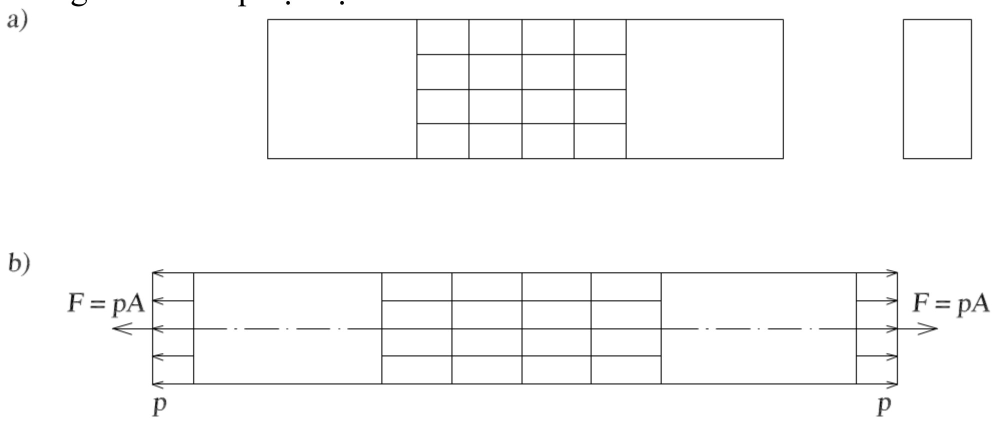
3.1.1. Định nghĩa

Một thanh chịu kéo hay nén đúng tâm khi trên tiết diện của nó chỉ tồn tại một thành phần ứng lực là lực dọc N. Lực dọc dương thì thanh chịu kéo, lực dọc âm thì thanh chịu nén

Ví dụ: Cột trụ chịu nén bởi trọng lượng bản thân, dây cáp của kết cấu treo, các thanh trong kết cấu dàn… Có thể thấy dạng chịu lực này là trường hợp khá phổ biến của các thanh thẳng dùng trong kỹ thuật.

3.1.2. Giả thiết về biến dạng của thanh

Để nghiên cứu, ta xét một thanh chịu kéo đúng tâm như hình 3.1a. Giả thiết mặt cắt ngang của thanh là hình chữ nhật. Trước tiên ta vạch lên mặt ngoài của thanh những đường thẳng song song và vuông góc với trục thanh tạo nên những ô vuông như hình 3.1a. Các đường vuông góc với trục đặc trưng cho tiết diện, các đường song song với trục đặc trung cho các lớp vật liệu.



Hình 3.1. Quan sát biến dạng của thanh thẳng chịu kéo đúng tâm

Trên cơ sở quan sát ta có thể nêu lên các giả thiết về tính chất biến dạng của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.

- Các tiết diện của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục – giả thiết tiết diện phẳng Becnuli.
- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không chèn ép xô đẩy nhau trong quá trình biến dạng, ta có thể bỏ qua ứng suất pháp trên những mặt cắt song song với trục thanh.
- Các thớ vật liệu dọc trục có biến dạng dài bằng nhau.

3.1.3. Biểu thức ứng suất:

Từ thí nghiệm, do các góc vuông không thay đổi, nên theo định luật Hooke, ứng suất tiếp trên tiết diện bằng không. Ứng suất pháp σ là hằng số trên tiết diện (vì biến dạng dài là như nhau với mọi thớ dọc) và tỷ lệ với biến dạng dài:

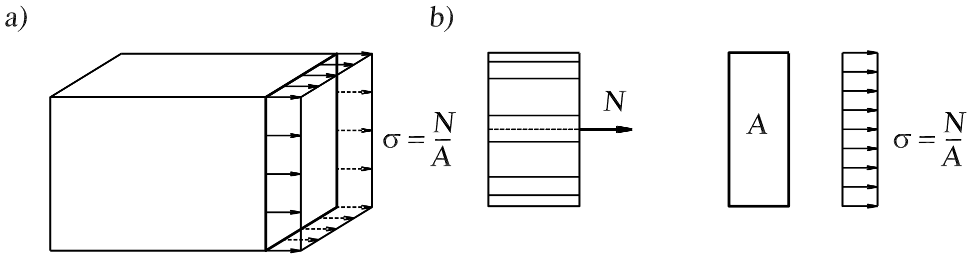
$$\sigma = E.\varepsilon\,.$$

Ứng lực N trên tiết diện: $$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma.A \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} \qquad (3\text{-}1)$$

Trong đó: N: Lực dọc trên tiết diện đang xét

A: Diện tích tiết diện.

Biểu đồ quy luật phân bố ứng suất pháp trên tiết diện xem hình 3-2.



Hình 3.2 Biểu đồ ứng suất pháp

3.2. Biến dạng của thanh

3.2.1. Biến dạng dài dọc trục

Ta có: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$ là biến dạng tỉ đối. (3-2)

Với một đơn vị dài là dz thì biến dạng dài là: $\varepsilon = \frac{N}{EA}dz$ (3-3)

với cả chiều dài thanh: $\Delta L = \int_L \varepsilon dz = \int_L \frac{N}{EA}dz.$ (3-4)

Khi tỷ số $\frac{N}{EA}$ là hằng số trên cả chiều dài L: $\Delta L = \frac{NL}{EA}$

$\frac{N}{EA}$ là hằng số trên từng đoạn chiều dài Li: $\Delta L = \sum_i \left(\frac{NL}{EA}\right)_i$ (3-5)

EA là hằng số trên cả chiều dài L: $\Delta L = \frac{\Omega_N}{EA}$ (3-6)

Ω_N diện tích biểu đồ lực dọc trên đoạn chiều dài L

3.2.2. Biến dạng dài theo phương ngang

Biến dạng dài dọc trục và biến dạng dài theo phương ngang trục có dấu ngược nhau. Thực nghiệm và lý thuyết cho thấy độ lớn của hai loại biến dạng này tỷ lệ với nhau, hệ số tỷ lệ tuỳ thuộc vào loại vật liệu

Ký hiệu ε' là biến dạng dài theo phương ngang trục, hệ số tỷ lệ μ

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E} \quad (3\text{-}7)$$

3.2.3. Các hằng số đàn hồi của vật liệu. Độ cứng khi kéo, nén của tiết diện.

Các hằng số đàn hồi E và μ được tìm từ thực nghiệm.

Hằng số E [lực/(chiều dài)^2]: Mô đun đàn hồi khi kéo (nén), thể hiện độ cứng khi kéo (nén), (biến dạng) của vật liệu.

Hằng số μ: Hệ số nở ngang hay hằng số poisson không thứ nguyên.Với mọi loại vật liệu giá trị μ nằm trong khoảng $0 \le \mu \le 0{,}5$.

Ví dụ: Giá trị E và μ của các loại vật liệu thường dùng.

Vật liệu	E (kN/cm^2)	μ
Thép cán	2,1.10^4	0,30 ± 0,05
Bê tông	2,4.10^3	0,2
Gạch	7,0.10^2	0,25

Nhận xét:

- Biến dạng của thanh phụ thuộc vào tích EA.
- Tích này càng lớn thì ΔL càng nhỏ,

- EA gọi là độ cứng khi kéo (nén) của tiết diện.
- $\frac{EA}{L}$: Độ cứng khi kéo (nén) của thanh.

3.2.4. Chuyển vị của tiết diện

Ta thấy các tiết diện không xoay mà chỉ chuyển vị tịnh tiến dọc trục ở hoành độ z chuyển vị dọc trục là w, hoành độ z+dz chuyển vị dọc trục là w+dw

Biến dạng dài của một đơn vị chiều dài:

$\varepsilon = \frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}$ giải phương trình này ta sẽ xác định được chuyển vị.

Khi $\varepsilon = \frac{N}{EA}$ là hằng số thì w là một hàm bậc nhất.

<u>Ví dụ 3.1.</u>

Tìm ứng suất trong thanh và biến dạng dài tuyệt đối của thanh chịu lực như hình 3-5.
Cho: E= 20.10^{10} kN/m^2, F_1 = 10cm ^{2}, F_2 = 20cm ^{2}, P_1=2kN, P_2=5kN, P_3=7kN

<u>Bài giải:</u>

Dùng phương pháp mặt cắt xác định được ứng lực dọc Nz cho từng đoạn thanh thể hiện trên đồ thị N_z.

Tìm ứng suất pháp σ_z cho từng đoạn thanh theo công thức:

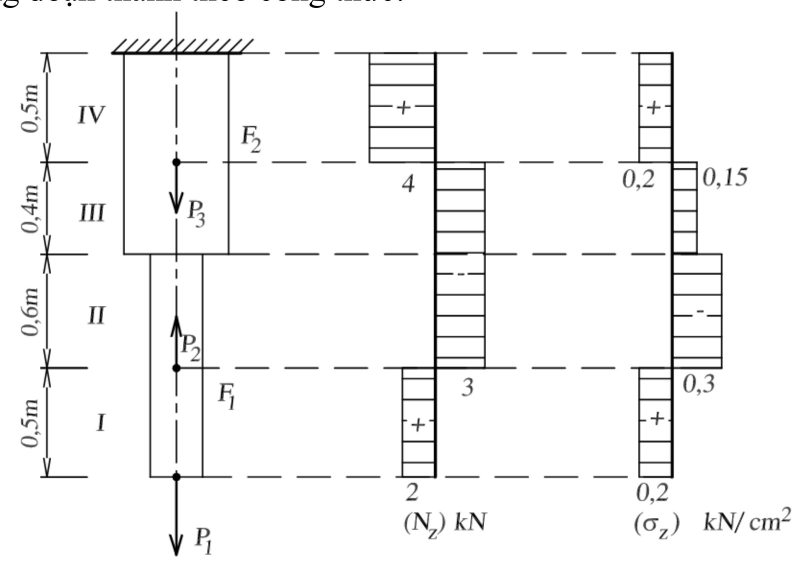
$$\sigma_{z_i} = \frac{N_i}{A_i}$$

$$\sigma_I = \frac{2}{10} = 0{,}2(kN/cm^2)$$

$$\sigma_{II} = -\frac{3}{10} = -0{,}3(kN/cm^2)$$

$$\sigma_{III} = -\frac{3}{20} = -0{,}15(kN/cm^2)$$

$$\sigma_{IV} = \frac{4}{20} = 0{,}2(kN/cm^2)$$

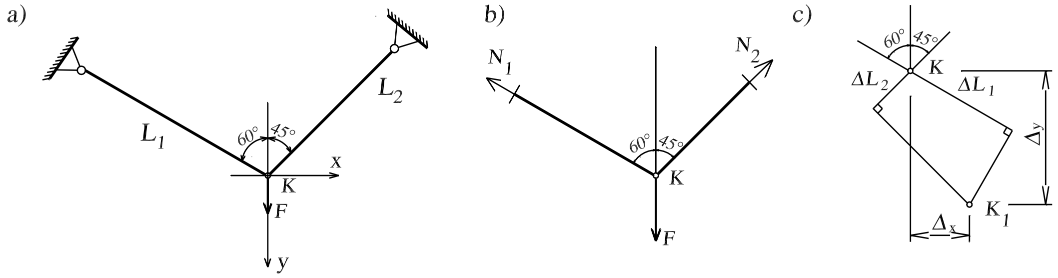


Hình 3.5. Cho ví dụ 3.1

Biểu đồ σ_z được thể hiện trên hình vẽ 3.5.

Tính biến dạng dài của thanh: $\Delta L = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i L_i}{EA_i} = -2.10^{-4}(cm)$

<u>Ví dụ 3.2</u>: Xác định chuyển vị tại khớp K của hệ cho như hình 3.6 sau: A = 5cm^2, E = 10^4 kN/cm^2, l_1 = 1m, l_2 = 2m, F = 30kN



Hình 3.6. Cho ví dụ 3.2

Xét cân bằng khớp K ta có:

$$\begin{cases}\sum Y = 0 \Leftrightarrow N_1\cos 60^\circ + N_2\cos 45^\circ - F = 0\\ \sum X = 0 \Leftrightarrow -N_1\sin 60^\circ + N_2\sin 45^\circ = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{N_1}{2} + N_2\dfrac{\sqrt{2}}{2} - F = 0\\ -N_1\dfrac{\sqrt{3}}{2} + N_2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_1 = 21,96kN\\ N_2 = 26,89kN\end{cases}$$

Biến dạng dài của các thanh.

$$\Delta L_1 = \frac{N_1L_1}{EA_1} = \frac{21,96.100}{10^4.5} = 4,4.10^{-2}(cm)$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2L_2}{EA_2} = \frac{26,89.200}{10^4.5} = 10,76.10^{-2}(cm)$$

Vị trí của khớp K sẽ là giao điểm của hai cung tròn tâm B bán kính $l_1 + \Delta l_1$ và cung tròn tâm C bán kính $l_2 + \Delta l_2$. Nhưng do biến dạng là rất nhỏ nên có thể xác định vị trí K_1 của K như sau:

Ở vị trí K lấy thêm các biến dạng dài Δl_1 và Δl_2 theo phương biến dạng của thanh. Từ đầu mút các đoạn thẳng này kẻ các đường thẳng vuông góc với trục thanh tương ứng giao điểm là điểm K_1 của K sau biến dạng.

$$\begin{cases}\Delta l_1 = \Delta_y\sin 30° + \Delta_x\cos 30°\\ \Delta l_2 = \Delta_y\sin 45° - \Delta_x\cos 45°\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0,5\Delta_y + 0,866\Delta_x = 4,4.10^{-2}(cm)\\ 0,707\Delta_y + 0,707\Delta_x = 10,76.10^{-2}(cm)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta_x = -2.36.10^{-2}(cm)\\ \Delta_y = 12,87.10^{-2}(cm)\end{cases} \begin{cases}\Rightarrow \Delta_K = \sqrt{\Delta^2{}_x + \Delta^2{}_y} = 13,08.10^{-2}(cm)\\ \Rightarrow \phi = arctg\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = arctg(-5,45) \approx 80^0\end{cases}$$

3.3. Bài toán siêu tĩnh

Đối với bài toán thanh: khi số liên kết của thanh nhiều hơn số lượng liên kết cần thiết đủ để cố định vị trí của thanh - lúc đó số phương trình cân bằng tĩnh học không đủ để xác định số ẩn số phản lực liên kết. Lúc đó thanh không phải là tĩnh định mà gọi là siêu tĩnh.

Để tìm hết ẩn số phản lực liên kết ta phải tìm thêm các phương trình miêu tả điều kiện biến dạng của hệ- phương trình biến dạng.

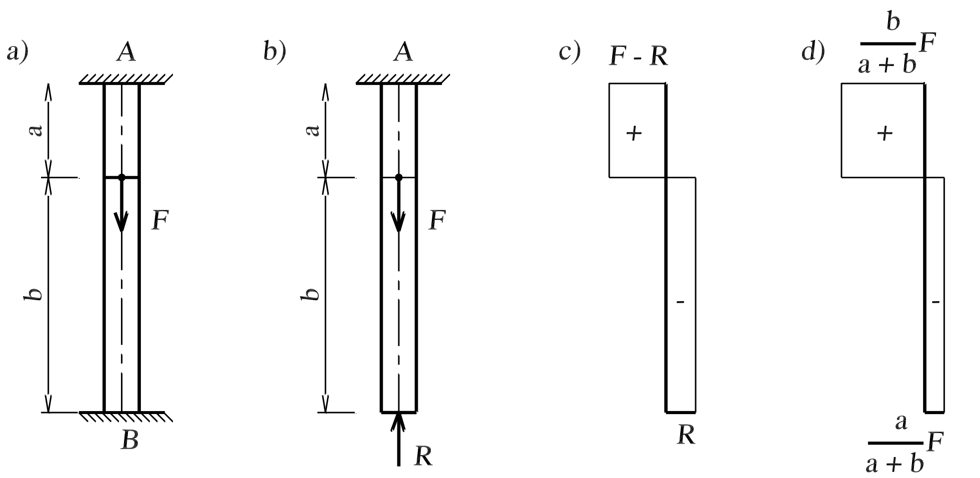
<u>Ví dụ 3.3:</u> Vẽ biểu đồ lực dọc của thanh thẳng AB như hình 3.10.

Thanh thừa một liên kết gối di động ở đầu B. Bỏ gối này và thay một phản lực R → thanh trở thành tĩnh định. Dễ dàng vẽ được biểu đồ lực dọc trong thanh AB.

Vì đầu B không di chuyển dọc theo trục thanh được nên tìm R theo điều kiện biến dạng dài của thanh bằng không cho hệ tĩnh định:

Vì đầu B không di chuyển dọc thanh nên $\Delta L = \dfrac{-R.b}{\text{E.A}} = \dfrac{\text{(F-R).a}}{\text{E.A}} = \text{E.A} \rightarrow \text{ R} = \dfrac{a.F}{a+b}$

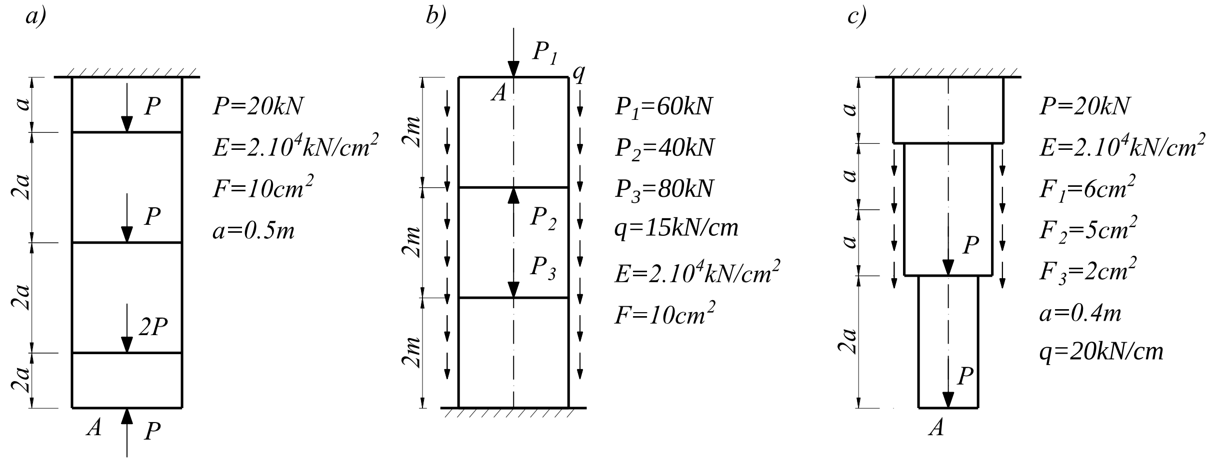
→ Vẽ lại biểu đồ nội lực trong thanh đã cho ban đầu, hình 3-10



Hình 3.10. Cho ví dụ 3.3

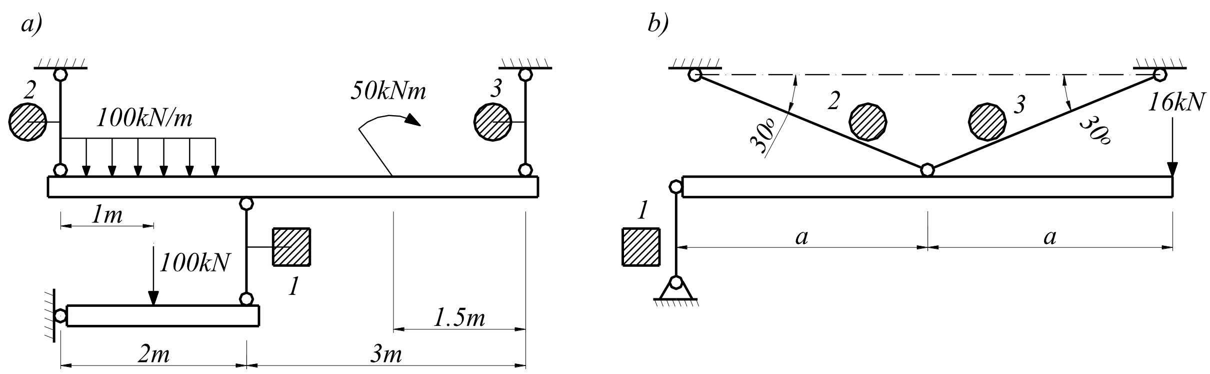
BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 3.1. Cho các thanh chịu lực trên hình 3.1. Vẽ biểu đồ lực dọc và ứng suất pháp. Các số liệu cho trên hình vẽ. Tính chuyển vị tại điểm A.



Hình 3.1

Bài 3.3. Cho hệ thống thanh chịu lực như hình 3.4. Xác định kích thước mặt cắt ngang của các thanh đánh số trên hình vẽ, biết rằng ứng suất cho phép $[\sigma] = 1600 N/cm^2$,

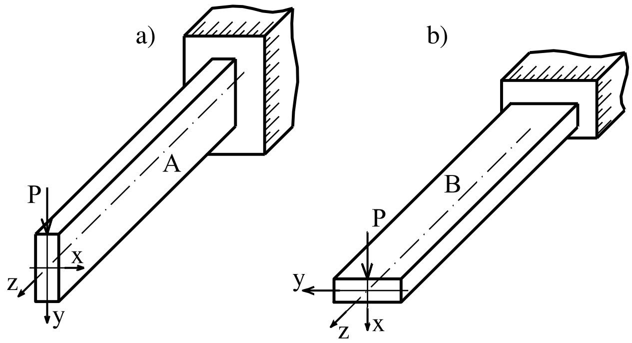


CHƯƠNG 5. ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA TIẾT DIỆN

5.1. Khái niệm chung

Khả năng chịu lực của kết cấu nói chung, của thanh nói riêng ngoài yếu tố vật liệu cấu tạo nó còn phụ thuộc vào các yếu tố khác liên quan đến hình dáng tiết diện thanh so với phương lực tác dụng...

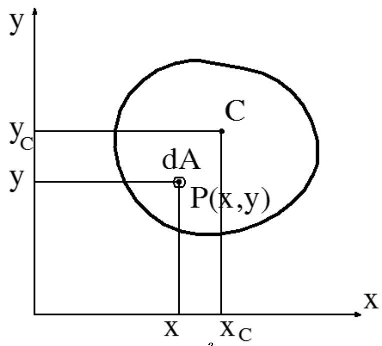
Thí dụ: Xét hai thanh như hình 5-1: Có cùng hình dáng tiết diện, cùng diện tích tiết diện và cùng chịu một lực P như nhau. Rõ ràng là trường hợp A thanh bị cong ít hơn trường hợp B.



Hình 5.1. Phương chịu lực khác nhau của tiết diện

5.2. Diện tích, mômen tĩnh, trọng tâm.

Cho hình phẳng, lấy một vi phân diện tích dA chứa điểm P(x,y). Ta định nghĩa:



Hình 5.2. Hình phẳng và hệ tọa độ

- Diện tích phẳng: $A = \int_A dA$
- Mô men tĩnh của hình phẳng đối với trục x và trục y: $S_x = \int_A y \cdot dA ; S_y = \int_A x \cdot dA$
- Trục trung tâm là trục có mô men tĩnh bằng không S = 0.
- Giao của hai trục trung tâm là trọng tâm của tiết diện (x_c , y_c)

Ta lại có :

$$S_x = \int_A y \cdot dA = y_C \,.\, A = \sum y_{c_i} \cdot A_i \qquad (5\text{-}1)$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA = x_C . \, A = \sum x_{c_i} \cdot A_i \qquad (5\text{-}2)$$

Mô men tĩnh của hình phẳng đối với trục bằng diện tích của hình phẳng nhân với khoảng cách từ trọng tâm tới trục. Do vậy cần tìm tọa độ trọng tâm của tiết diện:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum y_{c_i} \cdot A_i}{\sum A_i} \;; \qquad (5\text{-}3)$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum x_{c_i} \cdot A_i}{\sum A_i} \qquad (5\text{-}4)$$

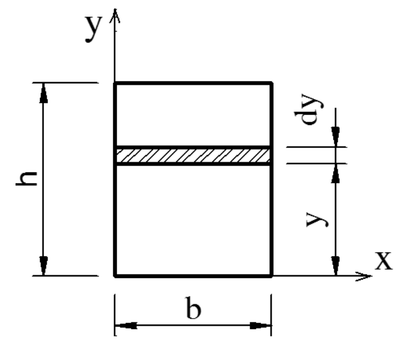
<u>Ví dụ 5.1:</u> Tìm trọng tâm các hình sau:

Hình chữ nhật, (hình 5.3): A = b x h

$$S_x = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = b\frac{y^2}{2}\Big|_o^h = \frac{bh^2}{2}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{2bh} = \frac{h}{2};$$

Tương tự: $y_c = \dfrac{b}{2}$



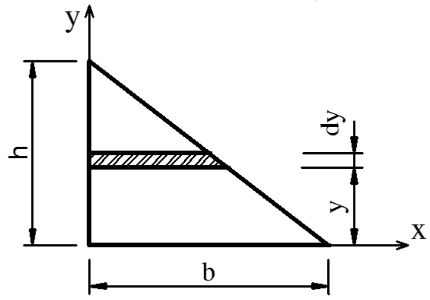
Hình 5.3. Cho ví dụ 5.1

Hình tam giác, (hình 5.4) $A = \dfrac{1}{2}b \cdot h$

$$S_x = \int_0^h y \cdot \frac{b}{h} \cdot (h-y)dy = \frac{b}{h}\int_0^h (h \cdot y - y^2)dy =$$

$$= \frac{b}{h}(\frac{h \cdot y^2}{2} - \frac{y^3}{3})\Big|_o^h = \frac{bh^2}{6}$$

$\Rightarrow$ yc = $\dfrac{S_x}{A} = \dfrac{h}{3}$, tương tự ta có: $x_c = \dfrac{b}{3}$



Hình 5.4. Cho ví dụ 5.1

5.3. Mô men quán tính.

- Đối với trục x: $I_x = \int_A y^2 \cdot dA$ (5-6)
- Đối với trục y: $I_y = \int_A x^2 \cdot dA$ (5-7)

Mô men quán tính của hình phẳng đối với trục bằng tổng của tích giữa diện tích phân tố dA và bình phương khoảng cách từ phân tố đến trục.

$$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA \quad (5\text{-}8)$$

Mô men quán tính li tâm của hình phẳng đối với hệ trục bằng tổng của tích giữa diện tích phân tố đến hai trục.

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA \quad (5\text{-}9)$$

Mô men quán tính cực của hình phẳng đối với một điểm bằng tổng của diện tích phân tố dA với bình phương khoảng cách từ phân tố đến điểm đó. Do vậy ta có

$$I_\rho = I_x + I_y \quad (5\text{-}10)$$

(I_ρ: mô men quán tính cực đối với gốc tọa độ xoy)

<u>Nhận xét:</u>

Hệ có mô men quán tính li tâm bằng không gọi là hệ trục chính ($I_{xy} = 0$).Do đó hình có trục đối xứng thì bất kỳ hệ chứa trục đối xứng đều là hệ trục chính. Hệ trục chính có gốc trùng với trọng tâm gọi là hệ trục chính trung tâm. Khi đó:

$$S_x = 0 = S_y = 0. \quad (5\text{-}11)$$

$$I_x = I_y = 0. \quad (5\text{-}12)$$

Mô men quán tính đối với trục chính trung tâm gọi là mô men quán tính chính trung tâm của tiết diện. Sau này mọi tính toán của ứng suất, biến dạng của thanh đều tiến hành trên hệ trục tọa độ gồm trục thanh z và hai trục chính trung tâm của tiết diện:

<u>Ví dụ 5.2</u>: Xác định mô men quán tính chính trung tâm của các hình sau:

Hình chữ nhật kích thước: bxh, xem hình 5-3.

Ta có: $I_x = \int_A y^2 \cdot dA == \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = b\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}(\frac{h^3}{8}+\frac{h^3}{8}) = \frac{b.h^3}{12}$

Tương tự ta có: $I_y = \frac{h.b^3}{12}$

Hình tròn, hình 5-6a

Cho hình tròn bán kính R. Tính I_ρ, I_x, I_y

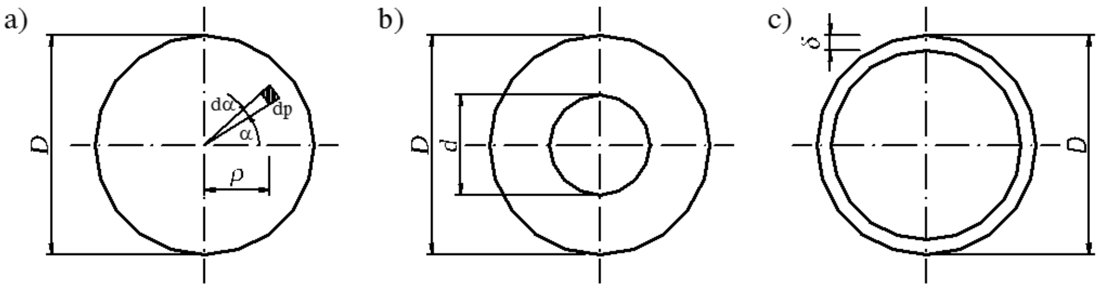
$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA$, dA = $\pi(\rho + d\rho)^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho d_\rho + \pi d_\rho^2 = 2\pi\rho \cdot d_\rho \cdot R$

$I_\rho = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho d_\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0{,}1D^4$, Ta có : $I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = 0{,}05D^4$

Hình tròn rỗng, hình 5-6b:

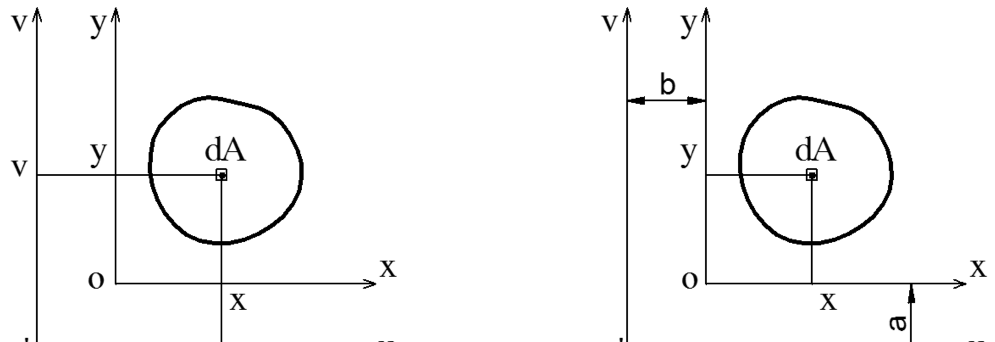
$I_\rho = I_\rho D - I_\rho d = 0{,}1\pi D^4(1 - (\frac{d}{D})^4) = 0{,}01D^4(1-\alpha^4)$, với $\alpha = \frac{d}{D}$

Ta có: $I_x = I_y = 0{,}05D^4(1-\alpha^4)$



Hình 5.6.a,b,c. Cho ví dụ 5.2

5.4. Mô men quán tính kh chuyển trục song song



Hình 5.7. Chuyển trục song song

Công thức chuyển trục: u = x + b, v = y + a

Theo định nghĩa ta có:

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (y^2 + a)dA = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A 2ay \cdot dA + \int_A a^2 \cdot dA$$

$$= I_x + 2aS_x + a^2A \qquad (5\text{-}13)$$

$$I_{uv} = \int_A uv \cdot dA = \int_A (x+a)(y+a)dA$$

$$= \int_A (xy + ax + by + ab)\cdot dA = \int_A xy \cdot dA + \int_A ax \cdot dA + \int_A by \cdot dA + \int_A ab$$

$$I_{uv} = I_{xy} + aS_y + bS_x + abA. \qquad (5\text{-}14)$$

Nếu hệ oxy là quán tính chính trung tâm ta có: $S_x = S_y = 0$;

$$\Rightarrow I_v = I_y + b^2A. \qquad (5\text{-}15)$$

$$\Rightarrow I_u = I_x + a^2A. \qquad (5\text{-}16)$$

$$\Rightarrow I_{uv} = I_{xy} + abA. \qquad (5\text{-}17)$$

Ví dụ 5.3:

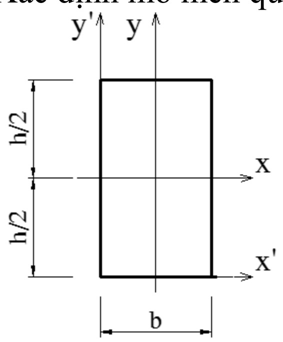
Xác định mô men quán tính đối với trục oxy trùng với các cạnh của tiết diện hình chữ nhật:

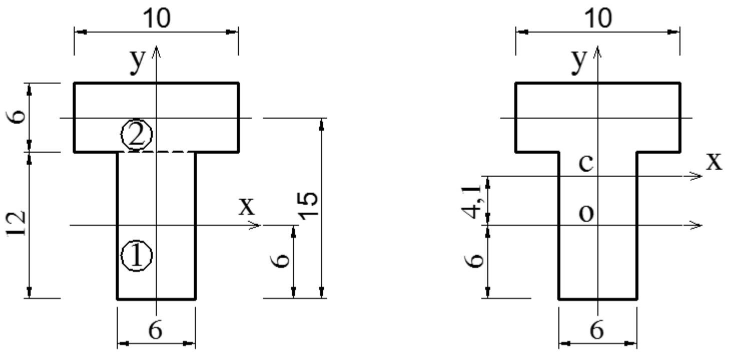
Ta đã có : $Ix = \frac{bh^3}{12}$; $Iy = \frac{b^3h}{12}$. Vì oxy là trục quán tính chính trung tâm nên:

$I_x = I_x + \frac{h^2}{4}A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$ +Tương tự: $I_{y'} = I_y + (\frac{b}{2})^2 \cdot A = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{4} = \frac{hb^3}{3}$

Ví dụ 5.4:

Xác định mô men quán tính chính trung tâm của tiết diện có kích thước như (hình 5.9)





Hình 5.8. Cho ví dụ 5.3 *Hình 5.9. Cho ví dụ 5.4*

<u>*Bài giải :*</u> Cần tìm:

- Hệ trục quán tính chính của hình
- Tính mô men quán tính với hệ trục này.

Chọn hệ trục yox' như hình vẽ : Gốc O trùng với trọng tâm của hình, trục oy là trục đối xứng của hình.

Diện tích của toàn mặt cắt: $A = A_1 + A_2 = 12.6 + 10.6 = 132\ cm^2$

Mô men tĩnh đối với trục ox': $S_x = S_x^1 + S_x^2 = 540 cm^2$

$S^1{}_x = 0$ vì trục ox' là trục đi qua trọng tâm cuả hình (1) $\Rightarrow y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{540}{132} = 4{,}1 cm$

Ta có hệ trục quán tính chính trung tâm của hình phẳng là hệ trục yCx∕∕ox' đi qua trọng tâm hình

Tính khoảng cách từ trọng tâm các hình đến trục quán tính chính trung tâm:

$$y'_1 = 4{,}1\ cm;\ y'_2 = 4{,}9\ cm$$

Tính các mô men quán tính chính trung tâm:

Với trục oy: $I_y = I_y^1 + I_y^2 = \frac{12 \cdot 6^3}{12} + \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 716\ cm^4$

Với trục ox: $I_x = I_x^1 + I_x^2$ trong đó: $I_x^1 = I_x^1 + y_1^2 A_1 = \frac{6 \cdot 12^3}{12} + 4{,}1^2 \cdot 6 \cdot 12 = 2074{,}3\ cm^4$

$$I_x^2 = \frac{10 \cdot 6^3}{12} + 4{,}9^2 \cdot 60 = 1620{,}6\ cm^4 \Rightarrow I_x = 3694{,}9\ cm^4$$

5.5.1. Trục chính, mô men quán tính chính

Ta thấy công thức xoay trục hình thức giống như công thức tìm trạng thái ứng suất trên mặt nghiêng của trạng thái ứng suất phẳng, hình 5-11. Ta có thể sử dụng các kết quả như sau:

- Vị trí trục quán tính chính: $tg2\alpha = \dfrac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$ (5-22)

- Mô men quán tính chính: $I_{\substack{\max \\ \min}} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$ (5-23)

5.5.3. Bán kính quán tính

Là một đại lượng được dùng trong tính toán kết cấu và được tính theo biểu thức:

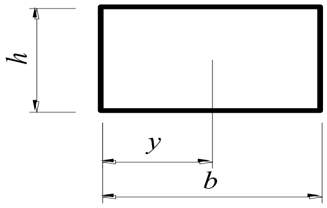
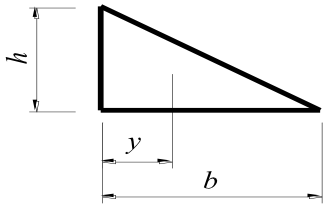
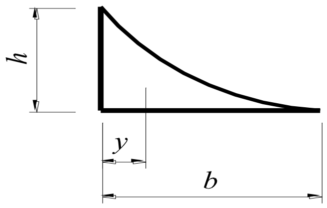
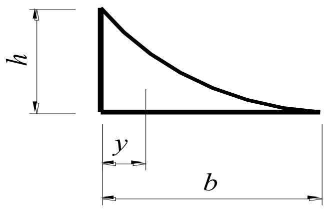
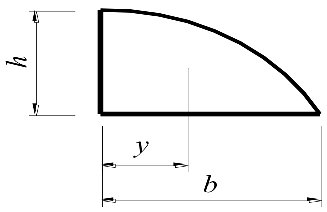
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}\ ;\ r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (5\text{-}26)$$

Với hệ trục chính r_x, r_y gọi là bán kính quán tính chính.

Nhận thấy:

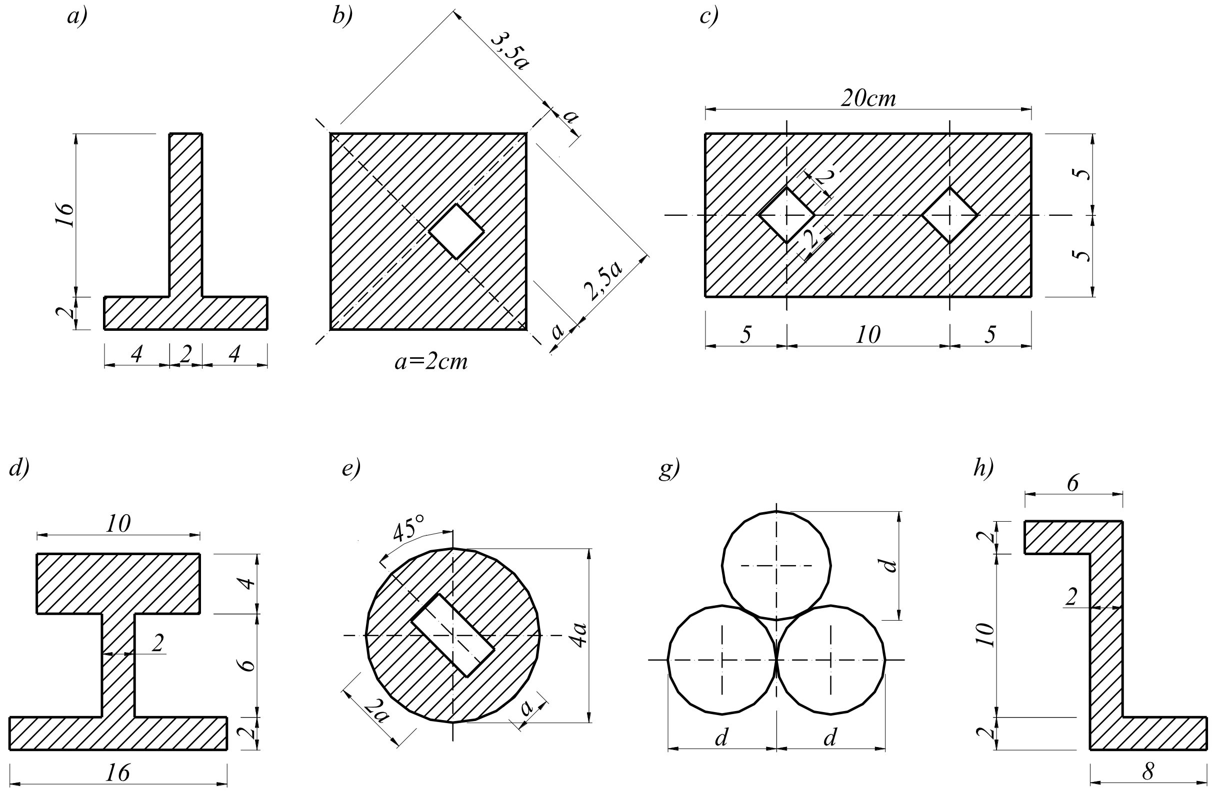
$$r_x^2 + r_y^2 = \frac{I_x + I_y}{A}\ ,\ r_u^2 + r_v^2 = \frac{I_u + I_v}{A} = \frac{I_x + I_y}{A} \text{ hay } r_x^2 + r_y^2 = r_u^2 + r_v^2 \qquad (5\text{-}27)$$

Bảng 5.1. *Diện tích, trọng tâm một số hình đơn giản*

Hình	*Diện tích*	*Trọng tâm*
	$A=b.h$	$y=b/2$
	$A=b.h/2$	$y=b/3$
	$A=b.h/3$	$y=b/4$
	$A=b.h/(n+1)$	$y=b/(n+2)$
	$A=2b.h/3$	$y=3b/8$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 5.1. Xác định hệ trục và mô men quán tính chính trung tâm của các tiết diện cho trên hình 5.1 (kích thước theo cm)

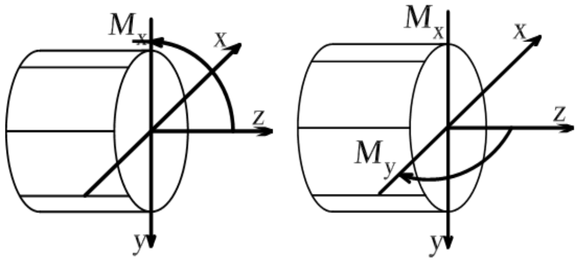


Hình 5.1

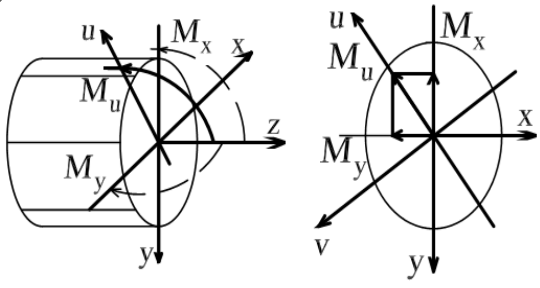
CHƯƠNG 7. THANH CHỊU UỐN PHẲNG

7.1. Khái niệm chung

Trong thanh chịu uốn, nếu có cả mô men uốn và lực cắt trường hợp chịu *uốn ngang,* còn nếu chỉ có mô men uốn trường hợp chịu *uốn thuần túy*.



Hình 7.1. Thanh chịu uốn phẳng



Hình 7.2. Thanh chịu uốn không gian

7.2. Ứng suất trên tiết diện thanh chịu uốn thuần tuý

7.2.1. Các giả thiết

- Trước và sau biến dạng tiết diện thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục.
- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tác dụng tương hỗ lên nhau, có thể bỏ qua các thành phần ứng suất pháp trên các mặt song song với trục $\sigma_x \approx \sigma_y \approx 0$.
- Tồn tại một lớp vật liệu song song với trục thanh có chiều dài không đổi, gọi là lớp trung hòa. Giao tuyến của lớp trung hoà với tiết diện là một đường thẳng, gọi là đường trung hoà.

Giả thiết một và hai đã sử dụng trong các chương trước; giả thiết thứ ba được chấp nhận khi xét biến dạng bé, tiết diện hầu như không biến dạng.

7.2.2. Thiết lập công thức tính ứng suất

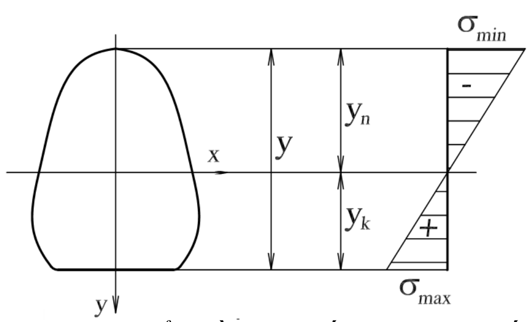
Công thức tính ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \qquad (7\text{-}4)$$

Lấy dấu các đại lượng: quy ước trục y hướng xuống, mô men dương làm căng thớ phía dưới của thanh hay phía dương của trục y.

7.2.3. Biểu đồ, trị số lớn nhất của ứng suất

Từ (7-4) trị số ứng suất pháp là một hàm bậc nhất tỷ lệ với khoảng cách đến trục trung hoà. Do đó theo chiều cao tiết diện biểu đồ ứng suất pháp là một đường thẳng, bằng không tại đường trung hoà, đạt giá trị lớn nhất tại mép dưới và giá trị nhỏ nhất tại mép trên của tiết diện, hình 7-5.



Hình 7.5. Biểu đồ ứng suất pháp trên tiết diện

Trị số lớn nhất của ứng suất pháp bằng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_k = \frac{M_x}{W_{x,k}} \qquad (7\text{-}5)$$

Trị số nhỏ nhất của ứng suất pháp bằng:

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{I_x} y_n = \frac{M_x}{W_{x,n}} \tag{7-6}$$

Có thể viết gộp lại như sau:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{M_x}{I_x} y_{\substack{k \\ n}} = \pm \frac{|M_x|}{W_{\substack{x,k \\ x,n}}}, \text{ (lấy dấu + khi tính } \sigma_{\max}\text{, dấu (-) khi tính } \sigma_{\min}\text{)} \tag{7-7}$$

Các đại lượng: $W_{x,k} = \frac{I_x}{y_k}$ và $W_{x,n} = \frac{I_x}{y_n}$ là một đặc trưng nữa của tiết diện, gọi là *mô men chống uốn.*

Trường hợp tiết diện đối xứng qua trục x thì $\mathrm{W_{x,k}} = \mathrm{W_{x,n}} = \mathrm{W_x} = \frac{\mathrm{I_x}}{\mathrm{h/2}}$,

Các trị số $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ bằng nhau: $\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \frac{|M_x|}{W_x}$

Mô men chống uốn của một số tiết diện thông dụng:

- Tiết diện hình chữ nhật b x h: $W_x = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$
- Tiết diện hình tròn đặc đường kính D: $W_x = \frac{\pi D^4/64}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0{,}1D^3$
- Tiết diện hình tròn rỗng, đường kính ngoài D, tỷ số $\frac{d}{D} = \alpha$:

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) \approx 0{,}1D^3(1-\alpha^4)$$

- Đối với thép định hình, các thông số về đặc trưng hình học của tiết diện được lập sẵn thành các bảng tra.

7.2.4. Điều kiện bền

Trên tiết diện ta tiến hành kiểm tra bền ở vị trí mép trên và mép dưới tiết diện có trị số ứng suất pháp lớn nhất. Vì thanh chịu uốn thuần túy nên phân tố trong thanh ở trạng thái ứng suất đơn. Điều kiện bền là:

$$\sigma_{\max k} = \frac{M_x}{W_{x,k}} \le [\sigma]_k \tag{7-8}$$

$$|\sigma_{mim}| = \left|\frac{M_x}{W_{x,n}}\right| \le [\sigma]_n, \text{ (vì } \sigma_{\min} < 0\text{)} \tag{7-9}$$

Trong kết cấu thanh cần kiểm tra cho tiết diện có giá trị mô men dương và mô men âm lớn nhất.

Khi tiết diện có tính đối xứng qua trục trung hoà thì trị số $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ bằng nhau, điều kiện bền là:

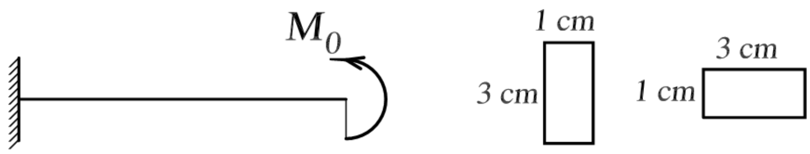
$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma]_n^k \tag{7-10}$$

Với vật liệu dẻo, khả năng chịu kéo và nén như nhau ($[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$) nên điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] \tag{7-11}$$

Ví dụ 7.1:

Xác định mô men M_0 cho phép tác dụng ở đầu tự do một công xôn có tiết diện bxh = 1x3 cm^2, $[\sigma]$ = 2,5 kN/cm^2 trong hai trường hợp đặt tiết diện khác nhau như trên hình 7-6a, 7-6b.



Hình 7.6. Cho ví dụ 7.1

Bài giải

Dầm chịu uốn thuần túy với mô men $M_x = M_0$. Theo điều kiện bền, ta có: $M_0 \leq W_x[\sigma]$

- Trường hợp thứ nhất (hình 7-6a): $W_x = 1.3^2/3 = 3\ cm^3 \Rightarrow M_0 \leq 1{,}5.2 = 3$ kNcm

- Trường hợp thứ hai (hình 7-6a): $W_x = 3.1^2/3 = 0{,}5\ cm^3 \Rightarrow M_0 \leq 0{,}5.2 = 1$ kNcm

7.3. Ứng suất pháp tiết diện khi thanh chịu uốn ngang phẳng

7.3.1. Giả thiết và công thức tính

Khi thanh chịu uốn trên tiết diện có cả lực cắt và mô men uốn lúc này ta gọi trường hợp thanh chịu uốn ngang phẳng. Xét một thanh công xôn chịu uốn ngang phẳng như hình 7.7. Ta thấy:

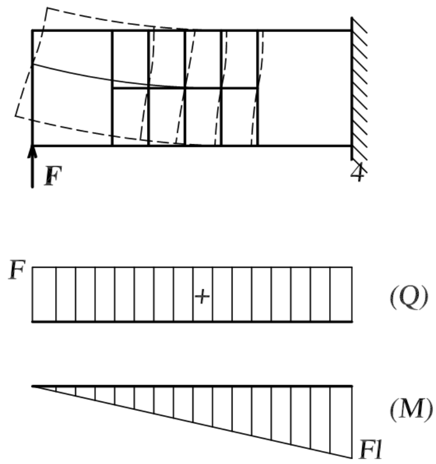
- *Các đường kẻ vuông góc với trục không còn thẳng.*

- *Các góc vuông bị thay đổi.*

Giả thiết tiết diện phẳng không còn đúng nữa, biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không làm thay đổi chiều dài theo phương ngang trục và phương dọc trục. Nên ta chấp nhận luật phân bố ứng suất pháp vẫn được tính theo công thức (7-4)

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y,$$

Trong đó y là khoảng cách từ điểm tính ứng suất đến trục trung hoà x (trục quán tính chính trung tâm của tiết diện).



Hình 7.7. Thanh chịu uốn ngang phẳng

Ví dụ 7.2.

Xác định ứng suất pháp, ứng suất tiếp tại điểm K trên tiết diện hình chữ nhật có các ứng lực: M = 20 Nm, Q = 1,4 kN trên (hình 7.11)

Bài giải

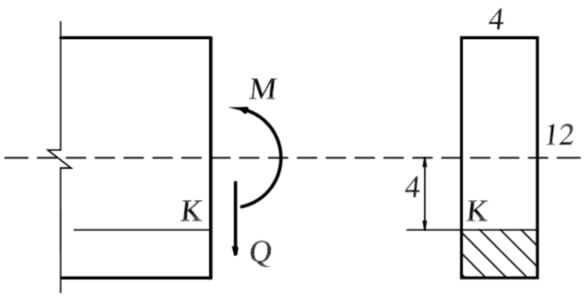
Mô men quán tính đối với trục trung hòa

$$I_x = \frac{4 \cdot 12^3}{12} = 576\ cm^4$$

Mô men tĩnh của phần diện tích cắt:

$S_{xc} = 2.4.5 = 40\ cm^3$

Ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại điểm K là:



Hình 7.11. Cho ví dụ 7.2

$$\sigma_K = \frac{2000}{576}4 = 13{,}9 \text{ N/cm}^2$$

7.4. Điều kiện bền của dầm chịu uốn ngang phẳng

7.4.1. Điều kiện bền

Tuỳ thuộc vào vị trí điểm tính ứng suất trên tiết diện mà phân tố ở những trạng thái ứng suất khác nhau:

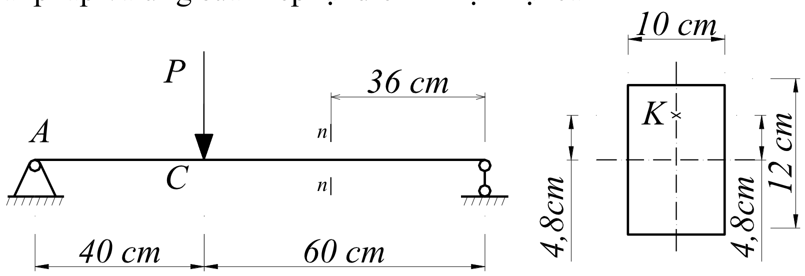
TTƯS đơn: Xuất hiện ở vị trí mép trên và mép dưới của tiết diện đạt giá trị lớn nhất. Điều kiện bền là:

$$\left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| = \frac{|M_x|}{I_x}\left|y_{\substack{k\\ n}}\right| \le [\sigma]^k_n$$, khi tiết diện đối xứng qua trục x: $$\left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| = \frac{|M_x|}{W_x} \le [\sigma]^k_n$$

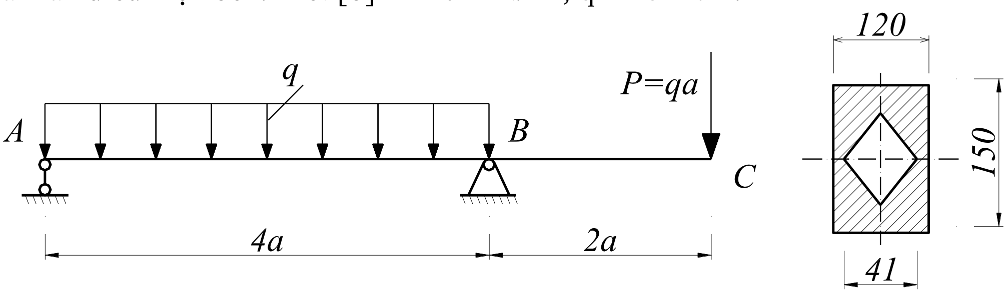
Kiểm tra điều kiện này tại tiết diện có trị số mô men uốn lớn nhất cho dầm có tiết diện không đổi.

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

Bài 7.1. Một dầm bằng gỗ có mặt cắt hình chữ nhật như trên hình 7.1.
Hãy vẽ biểu đồ mô men, lực cắt của dầm.
Kiểm tra độ bền của dầm theo điều kiện ứng suất tiếp biết [τ] = 120N/cm^2, [σ] = 1.100N/cm^2.
Tính các ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại điểm K tại mặt cắt n-n



Bài 7.8. Cho một dầm có mặt cắt ngang như trên hình 7.8. Xác định tị số của đồ dài a sao cho dầm thỏa mãn điều kiện bền. Biết [σ] = 120 MN/m^2, q = 20kN/m.



Hình 7.8

CHƯƠNG

THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

1.1. KHÁI NIỆM CHUNG

1.1.1. Các trường hợp chịu lực phức tạp

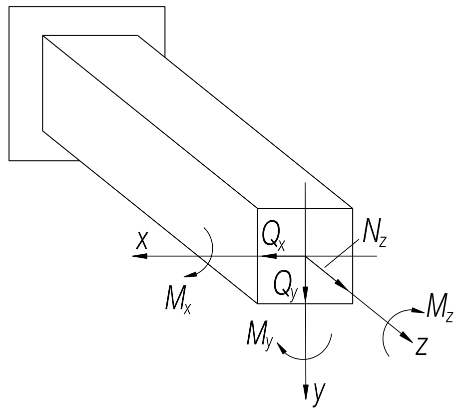
Trong những chương trên ta đã nghiên cứu các biến dạng của thanh chịu lực đơn giản: kéo, nén đúng tâm, xoắn thuần tuý và uốn ngang phẳng.

Trong thực tế có những thanh chịu tác dụng đồng thời của nhiều biến dạng cơ bản, ta nói thanh *chịu lực phức tạp.*

Tổ hợp những trường hợp chịu lực đơn giản được gọi là thanh chịu lực phức tạp.

Các trường hợp chịu lực phức tạp:

- Uốn xiên
- Kéo, nén và uốn
- Uốn và xoắn
- Kéo, nén, uốn và xoắn



Hình 1.1

1.1.2. Phương pháp tính

Phương pháp cộng tác dụng dựa trên nguyên lý độc lập tác dụng.

Các điều kiện áp dụng bài toán:

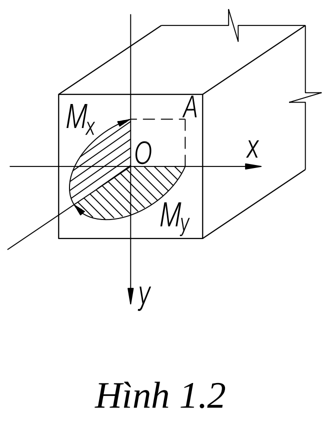
- Vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi, quan hệ giữa biến dạng, nội lực với ngoại lực là quan hệ bậc nhất (tuân theo định luật Hooke).
- Biến dạng và chuyển vị của thanh là bé.

1.2. THANH CHỊU UỐN XIÊN

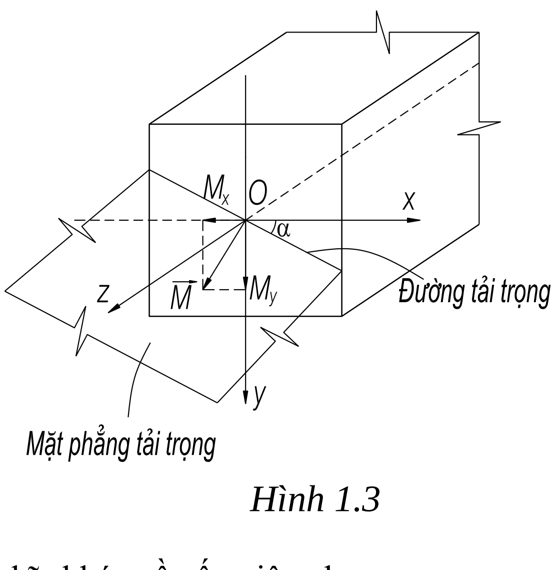
1.2.1. Khái niệm

Ta gọi thanh chịu uốn xiên là thanh mà trên mọi mặt cắt ngang chỉ có hai thành phần nội lực M_x, M_y.

Trong đó, các trục x và y là các trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.



Hình 1.2



Hình 1.3

Như vậy, ta có thể rút ra một định nghĩa khác về uốn xiên như sau:

Một thanh chịu uốn xiên là thanh mà trên các mặt cắt ngang chỉ có thành phần mômen uốn M nằm trong mặt phẳng chứa trục z và mặt phẳng này không chứa trục quán tính trung tâm nào của mặt cắt.

1.2.2. Ứng suất pháp

Ta gọi α là góc giữa hướng của trục x và đường tải trọng, $\alpha > 0$ khi chiều quay từ trục x đến đường tải trọng là thuận chiều kim đồng hồ ($\alpha < 90^o$).

Khi đó ta có quan hệ:

$$M_x = M \sin\alpha \tag{1.1}$$

$$M_y = M \cos\alpha \tag{1.2}$$

Áp dụng phương pháp cộng tác dụng:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \tag{1.3}$$

- x, y là toạ độ điểm tính ứng suất.

Công thức kỹ thuật:

$$\sigma = \pm \frac{|M_x|}{I_x}|y| \pm \frac{|M_y|}{I_y}|x| \tag{1.4}$$

Dấu (+): Khi M_x, M_y gây ứng suất kéo.

Dấu (-): Khi M_x, M_y gây ứng suất nén.

1.2.3. Đường trung hoà và biểu đồ ứng suất

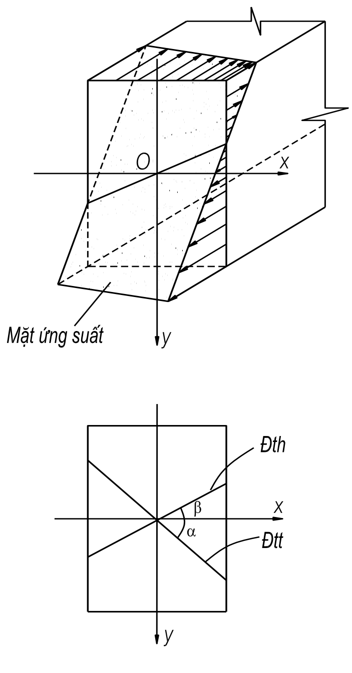
Nhận xét: Phương trình ứng suất là một mặt phẳng.

Giao tuyến của mặt phẳng ứng suất với mặt cắt ngang của thanh là quỹ tích những điểm có giá trị ứng suất pháp bằng không. Giao tuyến đó là đường trung hoà.

Phương trình đường trung hoà:

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

$$y = -\frac{M_y}{M_x}\frac{I_x}{I_y} x \tag{1.5}$$



Hình 1.4

Ứng suất pháp lớn nhất (đối với mặt cắt bất kỳ):

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{|M_x|}{I_x}\left|y^{k,n}_{max}\right| \pm \frac{|M_y|}{I_y}\left|x^{k,n}_{max}\right| \tag{1.8}$$

Mặt cắt có hai trục đối xứng:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \tag{1.9}$$

1.2.4. Kiểm tra độ bền. Ba bài toán cơ bản

Trên mặt cắt nguy hiểm của thanh $\left(|M_x|_{max}, |M_y|_{max}\right)$ điều kiện bền có dạng:

$$\begin{aligned} |\sigma_{min}| &\le [\sigma]_n \\ \sigma_{max} &\le [\sigma]_k \end{aligned} \tag{1.11}$$

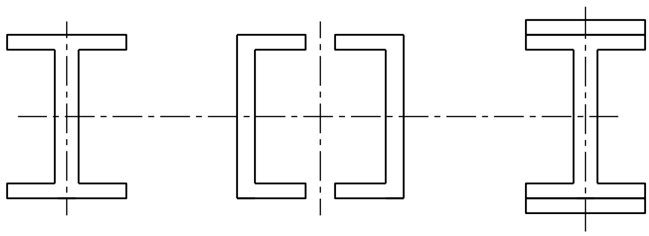
Trong đó:

$[\sigma]_n$ - ứng suất cho phép khi nén;

$[\sigma]_k$ - ứng suất cho phép khi kéo.

Đối với vật liệu dẻo, mặt cắt ngang của thanh có hai trục đối xứng (hình 1.6), điều kiện bền:

$$\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| \le [\sigma] \tag{1.12}$$



Hình 1.6

1.2.4.1 Điều kiện bền:

$$\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| \le [\sigma] \tag{1.13}$$

1.2.4.2. Bài toán thiết kế:

Bài toán chọn kích thước mặt cắt ngang phải theo phương pháp thử dần.

Với mặt cắt ngang có hai trục đối xứng:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma] \rightarrow \frac{1}{W_x}\left(|M_x| + \frac{W_x}{W_y}|M_y|\right) \le [\sigma]$$

Đặt $k = \dfrac{W_x}{W_y}$, ta được:

$$W_x \ge \frac{|M_x| + k|M_y|}{[\sigma]} \tag{1.14}$$

Đối với mặt cắt hình chữ nhật $k = \dfrac{W_x}{W_y} = \dfrac{bh^2}{6} : \dfrac{hb^2}{6} = \dfrac{h}{b}$.

Đối với mặt cắt I thường chọn $k = 8 \div 10$, mặt cắt chữ [chọn $k = 6 \div 8$.

1.3. THANH CHỊU UỐN VÀ KÉO (NÉN) ĐỒNG THỜI

1.3.1. Khái niệm chung

Thanh chịu uốn và kéo nén đồng thời là thanh mà trên mọi mặt cắt ngang chỉ có các thành phần nội lực là mômen uốn (M_x, M_y) và lực dọc N (hình 1.8).

1.3.2. Ứng suất pháp

Đối với mặt cắt bất kỳ:

Giả sử có mặt cắt ngang hình chữ nhật chịu uốn và kéo đồng thời. Ứng suất tại điểm A(x, y) thuộc mặt cắt ngang:

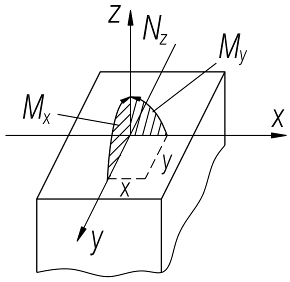
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \qquad (1.17)$$

Công thức kỹ thuật:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_x|}{I_x}|y| \pm \frac{|M_y|}{I_y}|x| \qquad (1.18)$$

Dấu (+): Khi M_x, M_y gây ra ứng suất kéo.

Dấu (-): Khi M_x, M_y gây ra ứng suất nén.



Hình 1.8

1.3.4. Ứng suất pháp cực tiểu và cực đại

Ứng suất pháp cực đại và cực tiểu tại những điểm tiếp xúc của chu tuyến mặt cắt với các đường song song với đường trung hoà.

Đối với tiết diện có hai trục đối xứng:

Ứng suất pháp đạt cực trị tại các đỉnh:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \qquad (1.22)$$

$$\sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}$$

1.3.5. Điều kiện bền

Bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp. Điểm nguy hiểm là điểm có ứng suất pháp cực trị. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn.

Điều kiện bền:

Vật liệu dẻo:

$$\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| \le [\sigma] \qquad (1.24)$$

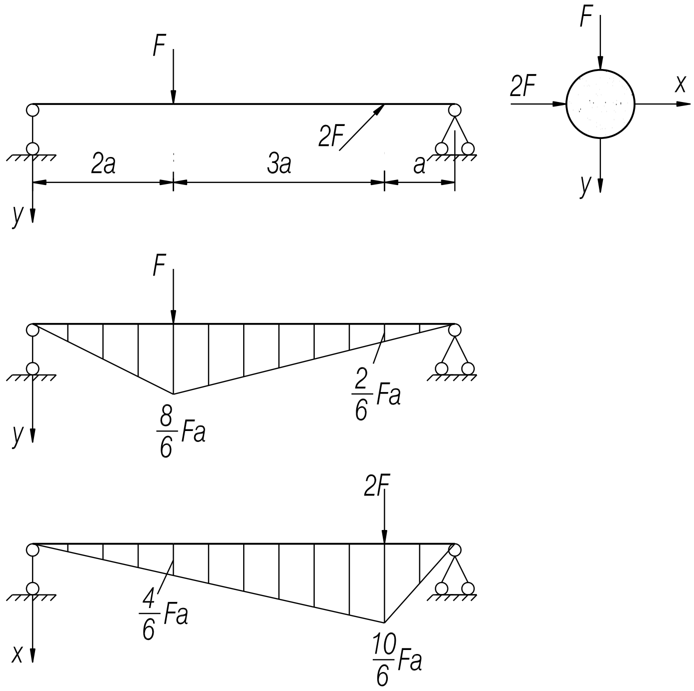
Vật liệu giòn:

$$\sigma_{max} \le [\sigma_k]$$
$$|\sigma_{min}| \le [\sigma_n] \qquad (1.25)$$

<u>Thí dụ 1.2</u>: Dầm giản đơn bằng gỗ, tiết diện hình tròn đường kính $D = 16cm$, chịu lực như trên hình 1.10. Xác định trị số cho phép của tải trọng F theo điều kiện bền. Cho biết $a = 50cm$, ứng suất cho phép $[\sigma] = 1{,}2kN/cm^2$.

<u>Bài giải</u>:

Các lực tập trung nằm theo hai phương vuông góc với nhau, các phương này cũng là các trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, ký hiệu x và y. Lực F theo phương y, gây ra biểu đồ mômen uốn M_x trong mặt phẳng yz. Lực $2F$ theo phương x, gây ra biểu đồ mômen uốn M_y trong mặt phẳng xz.



Tại tiết diện đặt lực F :

$$M_x = \frac{8}{6}Fa$$

$$M_y = \frac{4}{6}Fa$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$= \frac{Fa}{6}\sqrt{8^2 + 4^2} = 1{,}49Fa$$

Tại tiết diện đặt lực $2F$:

$$M_x = \frac{2}{6}Fa$$

$$M_y = \frac{10}{6}Fa$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$= \frac{Fa}{6}\sqrt{2^2 + 10^2} = 1{,}7Fa$$

Như vậy tiết diện đặt lực $2F$ là tiết diện nguy hiểm. Điều kiện bền cho tiết diện tròn chịu uốn xiên là:

$$\sigma_{max} = \frac{M_u}{W_u} \le [\sigma]$$

$$\rightarrow M_u \le [\sigma]W_u$$

$$\rightarrow 1{,}7Fa \le [\sigma]W_u$$

$$\rightarrow F \le \frac{[\sigma]W_u}{1{,}7a} = \frac{1{,}2.0{,}1.16^3}{1{,}7.50} = 5{,}78kN$$

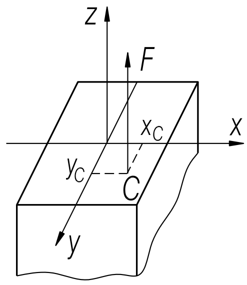
1.4. THANH CHỊU KÉO (NÉN) LỆCH TÂM. LÕI MẶT CẮT NGANG

1.4.1. Khái niệm chung

Kéo (nén) lệch tâm là trường hợp đặc biệt của uốn và kéo (nén) đồng thời.

Một thanh chịu kéo nén lệch tâm khi hợp lực của ngoại lực là một lực trục không trùng với trục thanh nhưng có phương song song với trục thanh (hình 1.11).

Khoảng cách e từ điểm đặt lực C(x_C, y_C) đến trọng tâm O gọi là độ lệch tâm.



Hình 1.11

Dời F về trọng tâm mặt cắt, thì có 3 thành phần:

$$N = \pm F$$

$$M_u = \pm Fe(M_x = \pm Fy_C = Ny_C , M_y = \pm Fx_C = Nx_C)$$

1.4.2. Ứng suất pháp

Áp dụng công thức (1.17), ta có công thức tính ứng suất pháp:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_C}{I_x} y + \frac{Nx_C}{I_y} x = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \qquad (1.26)$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Đặt $\frac{N}{A}$ làm thừa số chung:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_C y}{r_x^2} + \frac{x_C x}{r_y^2} \right) \qquad (1.27)$$

Trong đó:

r_x , r_y - là bán kính quán tính trung tâm;

x_C , y_C - là tọa độ điểm đặt lực.

Dấu của N là dương khi kéo, là âm khi nén.

Dấu của x_C , y_C , x , y phụ thuộc vào hệ tọa độ đã chọn.

Nhận xét: Bài toán kéo (nén) lệch tâm có thể tính theo trường hợp kéo (nén) và uốn đồng thời và ngược lại. Tính ứng suất pháp cực trị tương tự như phần uốn và kéo (nén) đồng thời.

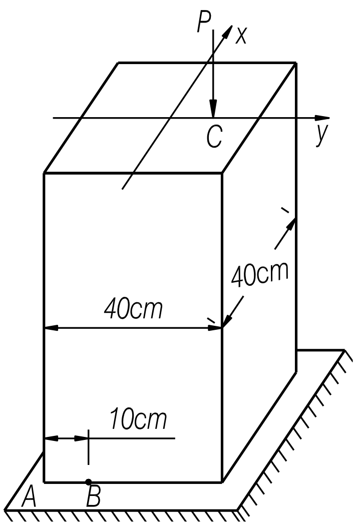
Thí dụ 1.3: Một cột bê tông mặt cắt hình vuông bị nén bởi lực P đặt lệch tâm trên trục y (hình 1.12). Cho biết ứng suất tại điểm A bằng $200 N / cm^2$, tại điểm B bằng không. Xác định tải trọng P tác dụng lên cột, độ lệch tâm của tải trọng và ứng suất nén lớn nhất ở cột.

Bài giải:

Nội lực tại mặt cắt chân cột:

$$N = -P ; \; M_x = Ny_C ; \quad M_y = 0$$

Ứng suất tại A và B:



Hình 1.12

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{Ny_C}{I_x} y_A = -200 N/cm^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{Ny_C}{I_x} y_B = 0 \qquad \text{(b)}$$

Đặc trưng hình học của mặt cắt:

$$A = 40.40 = 1600 cm^2$$

$$I_x = \frac{40^4}{12} = 21,333.10^4 cm^4$$

Thay vào phương trình (a) và (b) ta được:

$$y_C = \frac{40}{3} cm$$

$$N = -32.10^4 N \text{ hay } P = 32.10^4 N$$

Ứng suất nén lớn nhất ở cột:

$$\sigma_{min} = \frac{N}{A} + \frac{Ny_C}{W_x} = -600 N/cm^2$$

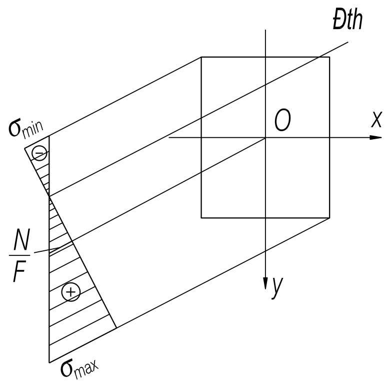
1.4.3. Đường trung hoà

Từ phương trình:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \qquad (1.28)$$

Nhận xét:

- Tại $x = y = 0$, $\sigma \neq 0$ nên đường trung hoà không đi qua gốc toạ độ.
- Giao tuyến của mặt phẳng ứng suất và mặt cắt ngang là đường trung hoà.
- Điểm có ứng suất cực trị là điểm nằm xa đường trung hoà nhất.
- Ứng suất tại các điểm trên đường thẳng song song đường trung hoà đi qua gốc toạ độ có trị số bằng nhau $\frac{N}{A}$.



Hình 1.13

CHƯƠNG 3
ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG
CHỊU NÉN, UỐN

3.1. KHÁI NIỆM CHUNG

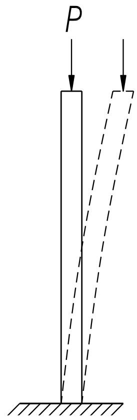
3.1.1. Khái niệm về ổn định và mất ổn định của hệ biến dạng

3.1.1.1. Xét một thanh tương đối mảnh như hình 3.1

Thanh có chiều dài lớn hơn nhiều so với kích thước mặt cắt ngang, thanh chịu nén đúng tâm N.

Khi lực nén đúng tâm N còn bé thanh vẫn giữ nguyên dạng thẳng. Khi thanh còn giữ dạng thẳng, ta nói thanh ở trạng thái ổn định.

Khi lực nén đúng tâm N lớn, thanh bị cong đi. Khi thanh bắt đầu bị cong, ta nói thanh ở trạng thái mất ổn định.



Hình 3.1

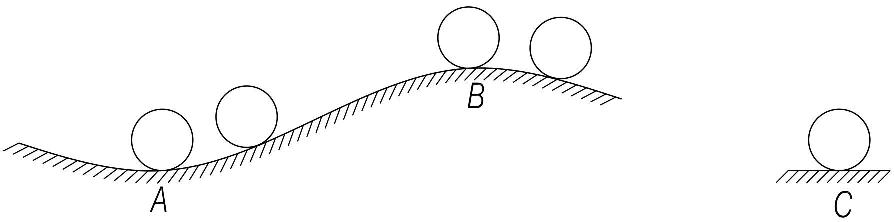
3.1.1.2. Cân bằng ổn định và không ổn định

Nghiên cứu sự ổn định vị trí của vật rắn qua sự cân bằng của quả cầu trên những bề mặt khác nhau (hình 3.2).

Quả cầu trên đáy lõm (độ cong dương): Nếu ta đẩy nó ra khỏi vị trí cân bằng, nó sẽ quay lại vị trí ban đầu. Đó là vị trí cân bằng ổn định.

Quả cầu trên đỉnh lồi (độ cong âm): Chỉ cần đẩy nhẹ nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu, nó sẽ tiếp tục rời xa vị trí ban đầu, không quay lại vị trí ban đầu. Đó là vị trí cân bằng không ổn định.

Quả cầu trên mặt nằm ngang (độ cong bằng không): Quả cầu không quay lại vị trí ban đầu, nhưng cũng không chuyển động xa hơn. Đây là vị trí cân bằng phiếm định.



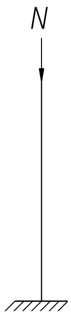
Hình 3.2

3.1.2. Lực tới hạn

Trạng thái trung gian này được gọi là *trạng thái cân bằng tới hạn* (hình 3.4b).

Trị số lực nén N_{th} tương ứng được gọi là *lực nén tới hạn.*

Trạng thái tới hạn là trạng thái ranh giới của hai biến dạng khác nhau (biến dạng nén thanh thẳng và biến dạng uốn), theo quy ước, tính ứng suất tới hạn theo biến dạng tương ứng với trạng thái ổn định.

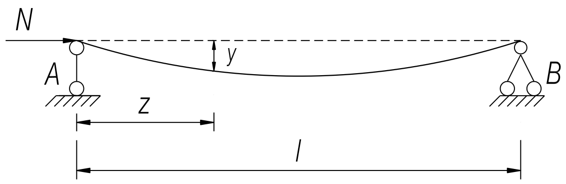


Hình 3.3

3.2. BÀI TOÁN EULER XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN

3.2.1. Thanh thẳng liên kết khớp ở hai đầu

Thanh AB hai đầu liên kết khớp bị nén dọc trục như hình 3.5. Khi lực nén đạt đến giá trị tới hạn N_{th}.



Hình 3.5. Bài toán Euler

Công thức lực tới hạn:

$$N_{th} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} \qquad (3.7)$$

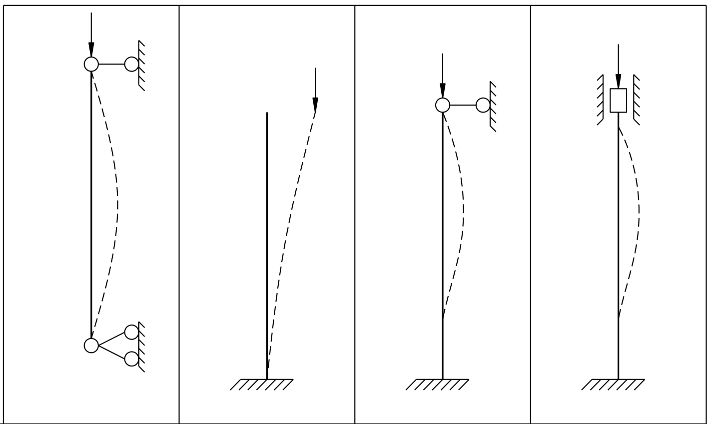
3.2.2. Thanh thẳng có các liên kết khác ở hai đầu

Đối với những thanh có liên kết ở hai đầu khác nhau, ta cũng có thể lập những phương trình vi phân tương tự, rồi giải bài toán với các điều kiện biên khác nhau tuỳ thuộc vào loại liên kết ở hai đầu thanh. Ta nhận được biểu thức của lực tới hạn tổng quát:

$$N_{th} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_o^2} \qquad (3.8)$$

μ - là hệ số tính đổi chiều dài.

l_o - chiều dài qui đổi của thanh khi tính ổn định.



μ	1	2	0,7	0,5

3.3. ỨNG SUẤT TỚI HẠN – GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC EULER

3.3.1. Ứng suất tới hạn

Công thức ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{N_{th}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2 A}$$

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{r_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2} \qquad (3.9)$$

Trong đó

$r_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ - là bán tính quán tính nhỏ nhất của tiết diện;

$\lambda_{max} = \frac{\mu l}{r_{min}}$ - là độ mảnh lớn nhất của thanh.

Độ mảnh λ là một đặc trưng ổn định của thanh, trị số này càng lớn thì khả năng ổn định của thanh càng nhỏ.

Độ mảnh cực đại:

$$\lambda_{max} = \frac{\mu l}{r_{min}} \tag{3.10}$$

Khi chịu lực đúng tâm, thanh bị mất ổn định trong mặt phẳng có độ mảnh cực đại.

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{r_x} \qquad \lambda_y = \frac{\mu l}{r_y} \qquad \lambda_{max} = \{\lambda_x, \lambda_y\} \tag{3.11}$$

.3.2. Giới hạn áp dụng công thức Euler

Phương trình vi phân đường đàn hồi $y'' = -\frac{M}{EI}$, cơ sở để giải bài toán Euler, chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi. Do đó, kết quả của bài toán cũng chỉ đúng khi vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi, tức là ứng suất tới hạn phải thoả mãn điều kiện:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2} \le \sigma_{tl} \tag{3.12}$$

Hay

$$\lambda_{max} \ge \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{tl}}} = \lambda_o \tag{3.13}$$

Vậy điều kiện áp dụng công thức Euler là

$$\lambda \ge \lambda_o \tag{3.14}$$

Trong đó

$\lambda_o = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{tl}}}$ - là độ mảnh giới hạn, chỉ phụ thuộc vào vật liệu.

Kết luận:

$\lambda \ge \lambda_o$ thanh có độ mảnh lớn.

$\lambda < \lambda_o$ thanh có độ mảnh vừa hoặc bé.